



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

EVALUAR LA EFICIENCIA DE UN CONTROLADOR ROBUSTO DE ORDEN NO ENTERO USANDO LA FUNCIÓN DE COSTO DEL CRITERIO INTEGRAL DEL VALOR ABSOLUTO DEL ERROR

JORGE LUIS PAUCAR SAMANIEGO

Trabajo de Titulación modalidad: Proyectos de Investigación y Desarrollo,
presentado ante el Instituto de Postgrado y Educación Continua de la ESPOCH,
como requisito parcial para la obtención del grado de:

**MAGISTER EN SISTEMAS DE CONTROL Y AUTOMATIZACIÓN
INDUSTRIAL**

Riobamba-Ecuador

Enero 2017

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

EL TRIBUNAL DEL TRABAJO DE TITULACIÓN CERTIFICA QUE: El Trabajo de Titulación Modalidad Proyectos de Investigación y Desarrollo, denominado: EVALUAR LA EFICIENCIA DE UN CONTROLADOR ROBUSTO DE ORDEN NO ENTERO USANDO LA FUNCIÓN DE COSTO DEL CRITERIO INTEGRAL DEL VALOR ABSOLUTO DEL ERROR, de responsabilidad del señor Jorge Luis Paucar Samaniego, ha sido minuciosamente revisado y se autoriza su presentación.

ING. FREDY PROAÑO, PhD

PRESIDENTE

ING. JESÚS ALBERTO RODRÍGUEZ FLORES, PhD.

DIRECTOR DE TESIS

ING. HENRY ERNESTO VALLEJO VIZHUETE, MsC.

MIEMBRO DE TESIS

ING. PAÚL DAVID MORENO AVILÉS, PhD.

MIEMBRO DE TESIS

DERECHOS INTELECTUALES

Yo, Jorge Luis Paucar Samaniego soy responsable de la ideas, doctrinas y resultados expuestos en este Trabajo de Titulación y el patrimonio intelectual del mismo pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

JORGE LUIS PAUCAR SAMANIEGO

No. Cédula 060300264-3

ENERO 2017

DERECHOS DE AUTOR

©, Jorge Luis Paucar Samaniego.

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor

DECLARACIÓN DE RESPONSABILIDAD

Yo, Jorge Luis Paucar Samaniego, declaro que el presente proyecto de investigación, es de mi autoría y que los resultados del mismo son auténticos y originales. Los textos constantes en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor, asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Titulación de Maestría.

JORGE LUIS PAUCAR SAMANIEGO

No. Cédula 060300264-3

ENERO 2017

DEDICATORIA

A mis hijos Emilia y Esteban

AGRADECIMIENTO

Al Gran Arquitecto del Universo por permitir que situaciones causales se generen durante este tiempo de estudio y colocar a las personas idóneas en el momento y lugar correcto. A Gaby, mi esposa, por su paciencia y apoyo incondicional, a mis padres por su eterno compromiso, gracias de todo corazón.

A la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, en las personas de Alberto Arellano A. y Paúl Romero R. por la confianza depositada en sus compañeros, siempre creyeron en nosotros y se esforzaron por mantenernos en la institución, infinitas gracias.

A mi estimado tutor, Jesús Rodríguez Flores por todo el tiempo dedicado y por compartir su gran conocimiento sin restricción alguna, a Henry y David muchas gracias.

Jorge Luis

TABLA DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Problema de Investigación	3
1.3. Formulación del Problema	4
1.4. Preguntas Directrices	4
1.5. Justificación de la Investigación	4
1.6. Objetivos de la Investigación	5
1.6.1. Objetivo General	5
1.6.2. Objetivos Específicos	5
1.7. Hipótesis	6
2. MARCO REFERECIAL	7
2.1. Modelos	7
2.1.1. Sistema	7
2.1.2. Modelo de un Sistema	7
2.1.3. Tipos de Modelos	7
2.1.4. Métodos de Obtención de Modelos	9
2.1.5. Identificación Experimental de Modelos	9
2.1.6. Identificación de Sistemas	9
2.2. Convolución de Funciones	11
2.3. Controladores Enteros	13
2.3.1. Controlador PID	14

2.3.2.	Método de sintonización de Ziegler and Nichols	15
2.4.	Cálculo No Entero	15
2.4.1.	Introducción	15
2.4.2.	Definición de Integración No Entera	17
2.4.3.	Operador Fractal Diferencial de Riemann-Liouville	18
2.4.4.	Operador Fractal Diferencial de Caputo	19
2.4.5.	Operadores Fractales de Grünwald-Letnikov	21
2.4.6.	Función de Mittag-Leffler	22
2.4.7.	Control No Entero	23
2.4.8.	Sistemas Dinámicos de Orden Fractal	24
2.4.9.	Modelos y Representación	25
2.4.10.	Estabilidad	25
2.4.11.	Respuesta transitoria	28
2.4.12.	Respuesta en estado estacionario	29
2.4.13.	Especificaciones del Control No entero	29
2.4.14.	Acciones de Control no Enteras	30
2.5.	Aproximaciones Numéricas	32
2.5.1.	Aproximación de Euler	32
2.5.2.	Regla Rectangular hacia atrás	33
2.5.3.	Aproximación de Tustin	34
2.5.4.	Diferenciación hacia atrás	34
2.6.	Optimización	36
2.6.1.	Optimización sin Restricciones	37
2.6.2.	Método de Gradiente	37

2.7. Métodos de Discretización	39
2.7.1. Representación en Variables de Estado	40
2.7.2. Variables de Estado	40
2.7.3. Espacio de Estado	40
2.7.4. Representación en Diagramas de Estado	41
2.7.5. Resolución de las Ecuaciones de Espacio de Estados	43
3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN	45
3.1. Optimización de Parámetros	45
3.2. Modelo Experimental de la Planta	46
3.3. Diseño del Control Entero	47
3.3.1. Método de Ziegler and Nichols	47
3.4. Diseño del Control No Entero	50
3.4.1. FOPID Usando Aproximación Fractal	51
3.4.2. Derivador Fractal	51
3.4.3. Integrador No Entero	51
3.4.4. FOPID Usando Espacio de Estados	55
3.4.5. Espacio de Estados	56
3.4.6. Predicción de un Estado Fractal	57
4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	60
4.1. Modelo de la Planta	60
4.2. Resultado de los Parámetros del Control Entero	60
4.2.1. Optimización de los Parámetros del Controlador Entero	61
4.3. Resultado FOPID Usando Aproximaciones Numéricas	63

4.3.1.	Control No entero con Aproximación Numérica Optimizados .	65
4.3.2.	Prueba 1 de los Controladores	65
4.3.3.	Prueba 2 de los Controladores	67
4.3.4.	Prueba 3 de los Controladores	69
4.3.5.	Prueba 4 de los Controladores	71
4.3.6.	Prueba 5 de los Controladores	73
4.3.7.	Prueba 6 de los Controladores	75
4.3.8.	Prueba 7 de los Controladores	77
4.4.	Resultado del FOPID Usando Espacios de Estados	79
4.4.1.	Integral No Entera	81
4.5.	Análisis de Resultados	83
4.5.1.	FOPID con Aproximación Numérica	83
4.5.2.	Parámetros Iniciales sobre el Sistema	83
4.5.3.	Señal del Salida de la Función de Costo	83
4.5.4.	Controlador No Entero Optimizado	83
4.5.5.	FOPID con Espacio de Estados	88
4.5.6.	Parámetros Iniciales del Sistema	89
4.6.	DEMOSTRACIÓN DE HIPÓTESIS	100
4.6.1.	Tiempo de Ejecución del Algoritmo	100
4.6.2.	Control Entero	101
4.6.3.	Valor de la Función de Costo	103
4.6.4.	Control Entero	103
4.6.5.	Compensación	106

ÍNDICE DE TABLAS

1.	Ziegler-Nichols para determinar los parámetros de un controlador entero	15
2.	Resultado de Parámetros Sintonzados mediante el primer método de Z-N	61
3.	Prueba 1 con 400 épocas	65
4.	Prueba 2 con 600 épocas	68
5.	Prueba 3 con 600 épocas	70
6.	Prueba 4 con 600 épocas	72
7.	Prueba 5 con 600 épocas	74
8.	Prueba 6 con 700 épocas	76
9.	Prueba 7 con 800 épocas	78
10.	Parámetros Iniciales para la evaluación de FOPID	83
11.	Parámetros Iniciales para la evaluación de FOPID	84

ÍNDICE DE GRÁFICOS

1-2. Sistema dinámico con entrada $u(t)$, perturbación $e(t)$ y salida $y(t)$. . .	8
2-2. Proceso para Modelar una Planta Experimental	10
3-2. Función $f(t)$	11
4-2. Función escalón unitario.	12
5-2. Función escalón unitario con la variable τ	12
6-2. Función $f(-\tau)$, <i>función espejular de $f(\tau)$</i>	13
7-2. Función $f(-\tau)$, cuando $t=1$, desplazada en el tiempo.	13
8-2. Controlador PID Paralelo	14
9-2. Representación Geométrica del método de Sintonización Ziegler-Nichols.	15
10-2. Comportamiento de la función de Mittag-Leffler.	23
11-2. Superficie de Riemann para $w = s^{1/3}$	26
12-2. Regiones del plano w superficie de Riemann para $w = s^{1/3}$	27
13-2. Sistema de lazo cerrado con acciones de control fractales	30
14-2. Acción integral sobre una señal de error.	31
15-2. Acción derivativa sobre una señal de error trapezoidal	32
16-2. Aproximación de la Integral por Euler	33
17-2. Aproximación de la Integral por la Regla de Rectángulos Inscritos	34
18-2. Aproximación de la Integral por la Regla Trapezoidal	35
19-2. Aproximación de la Derivada	35
20-2. Esquema Diagrama de Flujo para el Cálculo de Gradiente Decreciente	38
21-2. Comportamiento del algoritmo de Gradiente	39
22-2. Diagrama de Espacio de Estados en un sistema LTI	41

1-3. Diagrama de flujo del cálculo de la función de costo	46
2-3. Esquema del Sistema Identificado con Control Discretizado	47
3-3. Esquema de la respuesta al escalón del Sistema Identificado	48
4-3. Diagrama de bloques de la planta y el Control PID	49
5-3. Diagrama de un Control PID No Entero	50
6-3. Diagrama del Derivador Fractal	52
7-3. Diagrama del Integrador Fractal	53
8-3. Diagrama General del Control No Entero	55
9-3. Diagrama de bloques del comportamiento fractal	57
1-4. Respuesta del Control Entero no Optimizado	62
2-4. Control Entero Inicial y Optimizado	62
3-4. Respuesta del Control No Entero con Parámetros sin Optimizar. . . .	66
4-4. Prueba 1: Salida del Control	66
5-4. Prueba 1: Función de Costo vs. Epocas de Entrenamiento.	67
6-4. Prueba 1: Azul compensación inicial, gráfica roja compensación Final.	67
7-4. Prueba 2: Control No Entero con Parametros sin Optimizar.	68
8-4. Prueba 2: Salida del Control.	68
9-4. Prueba 2 Función de Costo vs. Épocas de Entrenamiento.	69
10-4. Azul compensación inicial, gráfica roja compensación Final.	69
11-4. Prueba 3: Control No Entero con Parametros sin Optimizar.	70
12-4. Prueba 3: Salida del Control.	70
13-4. Prueba 3: Función de Costo vs. Épocas de Entrenamiento.	71
14-4. Prueba 3: Azul compensación inicial, gráfica roja compensación Final.	71
15-4. Prueba 4: Control No Entero con Parámetros sin Optimizar.	72

16-4. Prueba 4: Salida del Control	72
17-4. Prueba 4: Función de Costo vs. Epocas de Entrenamiento.	73
18-4. Prueba 4: Azul compensación inicial, gráfica roja compensación Final.	73
19-4. Prueba 5: Control No Entero con Parámetros sin Optimizar	74
20-4. Prueba 5: Salida del Control	74
21-4. Prueba 5: Función de Costo vs. Epocas de Entrenamiento	75
22-4. Prueba 5: Gráfica azul compensación inicial, roja compensación Final	75
23-4. Control No Entero con Parámetros sin Optimizar	76
24-4. Salida 6 del Control	76
25-4. Función 6 de Costo vs. Epocas de Entrenamiento.	77
26-4. Gráfica 6 azul compensación inicial, gráfica roja compensación Final.	77
27-4. Control No Entero con Parámetros sin Optimizar.	78
28-4. Salida 7 del Control.	78
29-4. Función 7 de Costo vs. Épocas de Entrenamiento.	79
30-4. Gráfica 7 azul compensación inicial, gráfica roja compensación Final.	79
31-4. Diagrama de Controlador Fractal No Entero y desarrollo de EE	80
32-4. Simplificación y desarrollo FOPID en funciones de Transferencia.	81
33-4. Integral No entera operadores de Riemann Lioville.	82
34-4. Salida de la señal Control No Entero con sin Optimizar.	85
35-4. Variación de la Función de Costo y el número de Épocas.	86
36-4. Señales de Control Inicial y Optimizada (rojo).	87
37-4. Diagrama de Flujo del desarrollo de los controladores.	88
38-4. $\alpha_i = 1$ y $\alpha_d = 1$	89
39-4. $\alpha_i = 0,9$ y $\alpha_d = 0,9$	89

40-4. $\alpha_i = 0,8$ y $\alpha_d = 0,8$	90
41-4. $\alpha_i = 1,1$ y $\alpha_d = 1,1$	90
42-4. $\alpha_i = 1,2$ y $\alpha_d = 1,2$	91
43-4. $\alpha_i = 1,3$ y $\alpha_d = 1,3$	91
44-4. $\alpha_i = 1,4$ y $\alpha_d = 1,4$	92
45-4. $\alpha_i = 1,5$ y $\alpha_d = 1,5$	92
46-4. $\alpha_i = 1$ y $\alpha_d = 2$	93
47-4. $\alpha_i = 1$ y $\alpha_d = 0,6$	93
48-4. $\alpha_i = 1$ y $\alpha_d = 0,8$	94
49-4. $\alpha_i = 1$ y $\alpha_d = 1,1$	94
50-4. $\alpha_i = 1$ y $\alpha_d = 1,3$	95
51-4. $\alpha_i = 1$ y $\alpha_d = 1,5$	95
52-4. $\alpha_i = 1$ y $\alpha_d = 1,6$	96
53-4. $\alpha_i = 0,6$ y $\alpha_d = 1$	96
54-4. $\alpha_i = 0,8$ y $\alpha_d = 1$	97
55-4. $\alpha_i = 0,9$ y $\alpha_d = 1$	97
56-4. $\alpha_i = 1,1$ y $\alpha_d = 1$	98
57-4. $\alpha_i = 1,3$ y $\alpha_d = 1$	98
58-4. $\alpha_i = 1,5$ y $\alpha_d = 1$	99
59-4. $\alpha_i = 1,7$ y $\alpha_d = 1$	99
60-4. $\alpha_i = 1,8$ y $\alpha_d = 1$	100
61-4. Tiempo total de ejecución del algoritmo entero.	101
62-4. Tiempo de ejecución del algoritmo fractal usando Aproximaciones. . .	102
63-4. Tiempo de ejecución del algoritmo fractal Espacio de Estados. . . .	103

64-4. Variación de la Función de Costo en el Control Entero 500 épocas. . .	104
65-4. Variación de la Función de Costo en el Control Entero 5000 épocas. .	104
66-4. Función de Costo en el FOPID 500 épocas Aproximación Numérica. .	105
67-4. Función de Costo en el Control No Entero usando Espacio de Estados.	105
68-4. Salida del Controlador Entero Optimizado y no Optimizado.	106
69-4. Salida del Control No Entero Optimizado (rojo)	107
70-4. Control Entero Optimizado (rojo) y No Entero Optimizado(azul). . .	107
71-4. Control Entero Optimizado (rojo) y No Entero Optimizado(azul). . .	108

RESUMEN

El objetivo fue contrastar la eficiencia de un controlador de orden no entero con respecto a la eficiencia de un control robusto clásico del tipo PID. Con la finalidad de que las evaluaciones de estos algoritmos de control sean bajo las mismas condiciones, éstos fueron implementados sobre un modelo de planta experimental. Así mismo, se diseñaron los algoritmos de control usando el método de Ziegler-Nichols para el control entero, el método de aproximaciones numéricas usando series Euler en atraso y el método fundamentado en espacio de estado para el desarrollo del controlador no entero, cimentado en la convolución de dos señales causales para generar los estados y las ecuaciones del control no entero. La investigación se enfocó en la obtención del algoritmo de control no entero y los resultados arrojados para el método de aproximación numérica introdujeron un error en estado estacionario lo cual invalida completamente la aproximación. Sin embargo, al momento de implementar el algoritmo desarrollado en base a espacios de estado, se observó que la eficiencia, evaluada usando una función de costo generada en base a la integral absoluta del error, se incrementa. En consecuencia, el procedimiento para desarrollar un controlador no entero fundado en función de espacio de estados es similar al del controlador entero, con la diferencia de que éste utiliza el concepto de integral y derivada fractal de Riemann y Louville; la desventaja que se introduce al utilizar una convolución de señales causales es que se requiere una gran cantidad de espacio de almacenamiento en el buffer del controlador para guardar el valor de los espacios previos, se puede desarrollar otro algoritmo de control no entero usando un tercer método de aproximación numérica para eliminar el error en estado estacionario.

PALABRAS CLAVE: <TECNOLOGÍA Y CIENCIAS DE LA INGENIERÍA>
<INGENIERÍA EN CONTROL AUTOMÁTICO> <SISTEMAS DE CONTROL>
<SINTONIZACIÓN DE CONTROLADORES> <CÁLCULO FRACTAL> <PARÁMETROS DE CONTROLADORES FRACTALES> <INTEGRAL ABSOLUTA DEL ERROR> <OPTIMIZACIÓN DE PARÁMETROS>

ABSTRACT

The objective was to compare the efficiency of a non-integer order controller with respect to the efficiency of a classical robust PID control. In order that evaluations of these control algorithms are under the same conditions, they were implemented on an experimental plant model. Also, control algorithms were designed using the Ziegler-Nichols method for the whole control, the method of numerical approximations that used the Euler series in the time and the method based in the state space for the development of the non-integer controller, cementing in convolution two causal signals to generate states and non-integer control equations. The research focused on obtaining non-integer control algorithm and the results for the numerical approximation method introduced an error in steady state to completely invalidate the approximation. However, at the moment of implementing the algorithm developed based on the state spaces, it was observed that the efficiency, with a cost function generates based on the absolute integral of error, is increased. Consequently, the procedure for developing a non-integer controller based on state space is similar to that of the whole controller, except that the concept of integral and fractal derivative of Riemman and Louville; the disadvantage introduced in a convolution of causal signals is that a large amount of storage space is required in the buffer to store the value of the previous spaces, another no-integer control algorithm can be developed using a third numerical approximation method to eliminate the steady state error.

KEY WORDS: <TECHNOLOGIES AND ENGINEERING SCIENCE> <AUTOMATIC CONTROL ENGINEERING> <CONTROL SYSTEMS> <DRIVER TUNNIG> <FRACTAL INTEGRATED AND DERIVATIVES> <ERROR ABSOLUTE INTEGRAL> <OPTIMIZATION OF PARAMETERS> <PARAMETERS OF FRACTAL CONTROLLERS>

CAPITULO I

1 INTRODUCCIÓN

En este capitulo se detalla el problema de investigación, su planteamiento y formulación además la justificación los objetivos generales, específicos e hipótesis de la investigación.

1.1 Antecedentes

Hernandez et al. (2015) en su proyecto de investigación establece como objetivo realizar un control robusto para un horno rotatorio de cemento HRC de tipo FOPID para reducir las consecuencias que traen las perturbaciones externas y controlar el paso del combustible de ignición, la cantidad de agua para el enfriamiento y la alimentación del horno con materia prima, estas variables tienen relación directa con factores sensibles al proceso como requerimientos ambientales, financieros y de seguridad. Una de los parámetros a evaluar fue el rechazo al ruido de alta frecuencia y el controlador del tipo FOPID que fue capaz de rechazar en -20dB un ruido cuya frecuencia se encontraba en los 89.36 rad/s. También analizó el margen de fase y ganancia en la frecuencia de corte y la robustez ante variaciones de ganancia de la planta. Como conclusion a su estudio se pudo establecer que el controlador no se ve afectado por ruido de los sensores utilizados en la planta, por el contrario éste funciona como un filtro sobre sus señales y el sistema es robusto en un rango de frecuencias en el orden de los 0.020 a 90 rad/seg. Hortelano (2010) en su tesis doctoral se plantea como objetivo la aplicación de las herramientas de cálculo fraccionario al control predictivo basado en modelos. Para su consecución estudia el sistema de control desde sus elementos constituyentes como son la planta, el predictor y el optimizador y se desarrolla todo el control MPC en base a cálculo fraccionario. Una de las conclusiones que obtuvo de este trabajo es que es posible un control del tipo predictivo en una planta de naturaleza fraccionaria usando modelos discretos finitos, para la obtención de estos modelos recomienda el uso de metodologías como la de Chebyshev Euler usándola como función generadora. Como no se dispone técnicas de análisis de estabilidad numéricas como las de Routh o Jury el autor recomienda el uso de la herramienta de estudio de estabilidad basada en el criterio de Nyquist y ha realizado una evaluación numérica de la integral fraccionaria definida comprobando la linealidad de este operador para cualquier orden de integración al igual que su equivalente entero. Sauchelli and Laboret (2007) en su artículo publicado en la revista Mecánica Computacional Vol. XXVI sostiene que el cálculo fraccional conlleva un estudio de algunas funciones especiales

como la función gamma de Euler, series hipergeométricas y coeficientes binomiales lo cual demuestra que existen las transformadas de Fourier y Laplace resultantes de expresiones no enteras. Los autores demuestran que se puede realizar y controlar la robustez de un controlador no entero que actúa directamente sobre el error que se genera en una entrada del tipo escalón. Cuando se realiza integradores fraccionales por métodos tradicionales no producen los resultados esperados a frecuencias bajas Vinagre and Monje (2006) en su publicación argumenta que el control fraccionario es un conjunto de aplicaciones de cálculo fraccionario enfocadas hacia a teoría de control y su estudio se ha ido incrementando desde el año 2002, estos estudios han sido publicados en congresos y revistas internacionales como el IEEE Conference on Decision and Control (Las Vegas, USA 2002), ASME Conference in Mechanical Vibration and Noise (Chicago, USA 2003), etc. Se argumenta que el campo de aplicación del control no entero se extiende a campos como la teoría de sistemas, diseño de controladores y aplicaciones como el control de vibraciones, supresión de ruido, control de posición y velocidad, amortiguación activa, sistemas electrónicos de potencia, sistemas hidráulicos, robótica flexible y robótica móvil. Concluye que queda como trabajo encontrar una Teoría de Control para Sistemas de Orden Generalizado, es decir re formular totalmente la teoría de control clásica. Vera and Andrés (2010) Tiene por objetivo implementar una estrategia de control para la manipulación de la variable temperatura y asegurar que esa estrategia provea de robustez al sistema frente a perturbaciones medio ambientales. Además desarrolla su aplicación usando LabView, e implementar una serie de estrategias de control mediante ensayos y pruebas en una planta de laboratorio. Como conclusiones establece que todas las estrategias de control que se planteó en su tesis fue posible implementarlas usando LabView en su planta de laboratorio, todas estas de control aplicadas dan buenos resultados en el seguimiento de la temperatura de referencia obteniendo un comportamiento estable. Destaca una respuesta muy rápida en términos de convergencia, tiempos de subida y cantidad de sobre oscilación, el FOPID posee un grado de libertad mayor que el IOPID permitiendo ajustar las características de las respuestas. Sin embargo se produjeron señales de ruido en la temperatura, esto es producido por la inducción de corrientes parásitas en el sensor, este problema pueden ser resuelto diseñando filtros del orden no entero. Garcés et al. (2014) En su artículo realiza un análisis de robustez de las estrategias de control PID SIC FOPID para el control de un motor generador. El procedimiento que realiza para obtener resultados es un análisis teórico de cálculo y teoría de control, luego presenta los principales aspectos de SIMC PID e IOPID, una descripción del sistema y por último realiza la implementación del controlador sobre la planta. Como conclusión obtienen que un FOPID es un buen sistema para el rechazo de perturbaciones externas lo cual se ve reflejado en el poco esfuerzo que

realiza el controlador y éste ha rechazado perturbaciones del tipo ruido y carga. Barbosa et al. (2011) En su tesis se plantea como objetivo determinar la mejor estrategia de control para obtener un valor presente en el posicionamiento de un cilindro neumático preciso y se propone realizar un estudio del control fraccionario basándose en su comportamiento teórico, experimental ante perturbaciones, también realiza un estudio del control adaptativo y la comparación de las dos estrategias propuestas de control. El desarrollo de la tesis la realiza en base al software Matlab específicamente la herramienta Simulink y la aplicación para el cálculo de parámetros en el control fraccionario. Luego de resultados obtenidos con la implementación de los dos tipos de controladores sobre un cilindro neumático concluye que las estrategias logran los objetivos y que la elección depende de las especificaciones que se desea ya que ambos controladores son robustos y cumplen con el posicionamiento del cilindro, además recomienda realizar más pruebas del tipo fraccionario. En su publicación proporciona una introducción al cálculo fraccionario para el modelo y control de sistemas lineales de orden fraccionario, y afirma que los modelos fraccionarios permiten caracterizar mejor aquellos sistemas donde se dan fenómenos de memoria. Su desarrollo empieza en el análisis de sistemas dinámicos de primer orden, el control fraccionario en sí y termina su proyecto realizando el control fraccionario usando aproximaciones discretas. Concluye su trabajo comentando que el requerimiento de una teoría de control para sistemas de orden generalizado al menos para sistemas lineales invariantes en el tiempo.

1.2 Problema de Investigación

La mayoría de plantas que se estudian en la teoría control son sistemas LTI que durante su ejecución cumplen con las propiedades de linealidad y el principio de superposición definiendo de esta manera su respuesta que es la convolución de la entrada con la respuesta al impulso. Los métodos de sintonización para controladores enteros clásicos se enfocan en modelos lineales de orden reducido y son afinados de acuerdo a sus características estáticas, lo que provoca que el controlador sea óptimo y eficiente para un rango determinado de oscilación de la variable controlada y solo para ese sistema. En el caso que esta variable exceda el límite establecido de oscilación el controlador o se trate de aplicar a un sistema similar el controlador no estaría en la capacidad proporcionar la respuesta deseada y la señal de salida incluye un error con respecto a su punto de referencia. Existen muchos factores que conllevan la modificación de características intrínsecas de las plantas las cuales pueden ser considerados de índole mecánico, eléctrico y electrónico, también es importante un análisis de perturbaciones que pueden afectar el normal desenvolvimiento de una planta a controlar, lamentablemente este tipo de variaciones no pueden ser representadas y analizadas

mediante un modelo matemático debido a su naturaleza, es por eso que el controlador diseñado e implementado debe estar dispuesto a rechazar perturbaciones con un amplio rango frecuencial. La reducida flexibilidad y la eficiencia de los controladores de orden entero puede provocar que los ajustes que se debe considerar en sus parámetros de sintonización sean modificados si existe una pequeña variación en los elementos del proceso.

1.3 Formulación del Problema

¿Para qué casos determinados la eficiencia de un control robusto no entero es superior que la de un controlador robusto entero cuando ambos controladores son aplicados a un modelo de una planta que se basa en el criterio de Ziegler y Nichols y su desempeño es evaluado bajo criterio de la integral del valor absoluto del error?

1.4 Preguntas Directrices

1. ¿Se puede establecer la curva de reacción de un modelo de una planta experimental que cumpla con el criterio de Ziegler y Nichols y encontrar los parámetros iniciales?
2. ¿ Se puede demostrar que un controlador no entero puede partir con el mismo desempeño bajo la parametrización de un controlador entero para cuando el índice fractal es igual a la unidad?
3. ¿ Se puede utilizar una técnica no prejuiciada para establecer de manera automática la desviación de ajuste para cada uno de los parámetros del controlador entero y no entero?
4. ¿ Es válida la técnica del gradiente decreciente para el ajuste de parámetros de los controladores?
5. ¿Cuál es el resultado al contrastar los ajustes de control fractal y el control entero para cuando se incorpora en el criterio de sintonización de las variables error y velocidad del error?

1.5 Justificación de la Investigación

El controlador PID entero brinda buenas prestaciones ante la presencia de perturbaciones que afectan el comportamiento de un sistema LTI, siempre y cuando la magnitud de las perturbaciones no altere en gran medida el punto de operación del sistema. Es por eso que se desea desarrollar nuevas estrategias de control más eficientes y discriminar su aplicación en

distintos procesos existentes. Se pretende establecer y desarrollar los elementos matemáticos que nos permitan entender cuáles son los parámetros que influyen en el desarrollo de un controlador no entero aplicado sobre el modelo de una planta que cumpla ciertos criterios de sintonización y tomar como punto de partida de aplicaciones de control en las cuales se pueda determinar cual estrategia es la más eficiente. La importancia de esta investigación radica en determinar para que situaciones y plantas es beneficioso la aplicación de un controlador no entero pudiéndose desarrollar prototipos que sean capaces de mantener bajo control parámetros específicos con mayor eficacia y eficiencia basados en controladores enteros y no enteros. Una vez determinados los procedimientos de diseño se puede aplicar la teoría de control no entero en una planta de laboratorio que cumpla ciertos parámetros necesarios y decida las modificaciones necesarias para establecer el mejor controlador basando en criterios matemáticos de desempeño. En la actualidad se encuentran numerosos casos de estudio en los cuales el uso de controladores no enteros permiten ampliar las acciones de control, muchas metodologías de control se están basando el uso de cálculo no entero obteniendo ecuaciones dinámicas que gobiernan el comportamiento de los controladores. El principal aporte que pretende proporcionar esta investigación es la determinación de un procedimiento para desarrollar controladores no enteros que pueden superar la eficiencia de los enteros en ciertos casos, el proceso de validación de las nuevas teorías de control y la aplicación de un método para la evaluación cuantitativa de robustez y estabilidad basadas en la señal de error y velocidad de error. Para futuras investigaciones se puede plantear el análisis del comportamiento de un controlador no entero para plantas con múltiples entradas y salidas, desarrollar combinaciones de estrategias de control entre las no enteras y redes neuronales o control difuso, el desarrollo de filtros no entero o sistemas de auto sintonización de controladores no enteros.

1.6 Objetivos de la Investigación

1.6.1 Objetivo General

Evaluar la eficiencia de un controlador robusto de orden no entero emplear la función de costo integral del error absoluto.

1.6.2 Objetivos Específicos

1. Diseñar las estrategias de los controladores basadas en la teoría matemática predefinida.
2. Determinar los parámetros fundamentales del controlador entero fundado en el criterio

de Ziegler y Nichols para gobernar las variables de una planta experimental.

3. Optimizar los parámetros fundamentales de los controladores usando una función de costo.
4. Evaluar los controladores entero y no entero, usar una combinación ponderada de las señales del error y la tasa de cambio del error.

1.7 Hipótesis

El desarrollo de un controlador robusto del tipo PID no entero basado en métodos numéricos y el aumento en dos grados de libertad con respecto a los controladores robustos enteros, incrementan su eficiencia para gobernar una planta experimental.

CAPITULO II

2 MARCO REFERECIAL

En este capítulo se presenta el estado del arte del proyecto de investigación, se analiza cada una de las teorías, metodologías ya implementadas en estudios previos realizados sobre el tema.

2.1 Modelos

El diseño de controladores continuos o discretos requiere como elemento fundamental el modelo de la planta a controlar, el cual caracteriza su comportamiento dinámico. Este elemento nos permite realizar y validar, mediante software de simulación, el ajuste de los parámetros del controlador, y obtener la respuesta necesaria que satisfaga los requerimientos y especificaciones.

2.1.1 *Sistema*

Un sistema es toda realidad en la que interactúan variables de diferentes tipos para producir señales que son de interés del observador y se las denomina *salidas* del sistema, mientras que las señales excitadoras se denominarán *entradas*. El resto de señales que no pueden ser manipuladas por el observador se denominan *perturbaciones*. Lopez Guillen (2010)

2.1.2 *Modelo de un Sistema*

El objetivo de obtener una representación matemática (modelo), de un sistema es realizar experimentación, aplicando determinadas entradas y observar sus correspondientes salidas, basados en aproximaciones. Una de las ventajas de trabajar con un modelo y no sobre el sistema físico, es que éste permite predecir su comportamiento sin afectar su elementos constitutivos.

2.1.3 *Tipos de Modelos*

Lopez Guillen (2010), menciona que se puede establecer una clasificación en función del formulismo matemático que poseen, de esta forma se tienen:

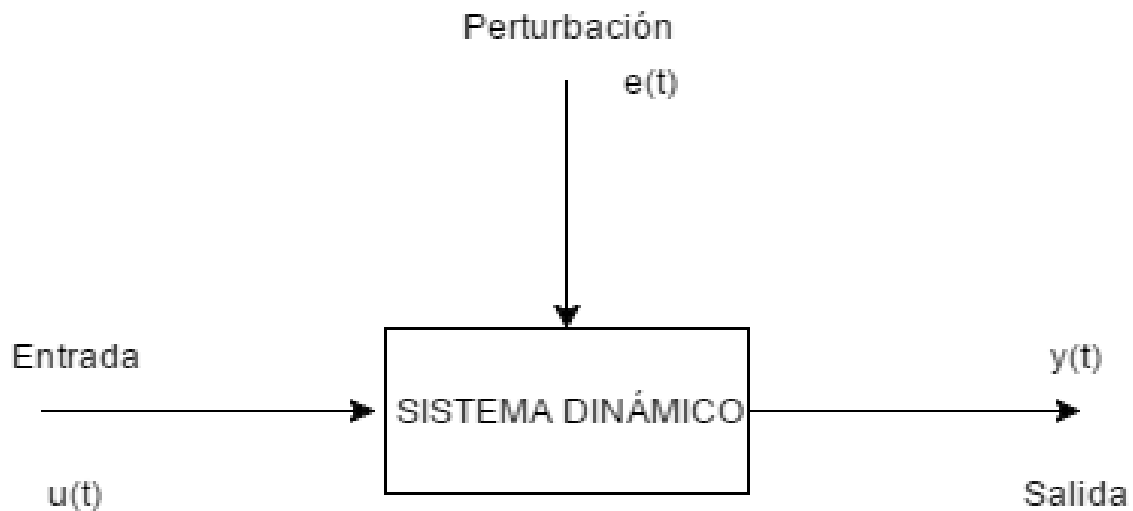


Gráfico 1-2: Sistema dinámico con entrada $u(t)$, perturbación $e(t)$ y salida $y(t)$

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

1. *Modelos Mentales, intuitivos o verbales:* Carecen de formalismo matemático.
2. *Modelos No Paramétricos:* Cuando son caracterizados mediante un gráfico, o una tabla que describa sus propiedades dinámicas mediante un número finito de parámetros. Un sistema lineal se define por su respuesta a un estímulo impulso o escalón, o su respuesta en frecuencia.
3. *Modelos Paramétricos:* En aplicaciones avanzadas se puede utilizar modelos que describan las relaciones entre variables del sistema, mediante expresiones matemáticas como pueden ser: ecuaciones diferenciales (sistemas continuos), o en diferencias (sistemas discretos).
 - a) *Determinísticos o estocásticos:* un modelo determinístico expresa una relación entre entradas y salidas mediante una ecuación exacta; un modelo estocástico, se expresa a través de conceptos estadísticos o probabilísticos, estos modelos presentan cierto grado de incertidumbre.
 - b) *Dinámicos o estáticos:* Es estático cuando la salida depende únicamente de la entrada en ese mismo instante. En un sistema dinámico, la salida varía en el tiempo luego de la aplicación de la entrada.
 - c) *Continuos y Discretos:* Los sistemas continuos trabajan con señales continuas caracterizándose mediante ecuaciones diferenciales. Los sistemas discretos trabajan con señales tomadas en muestras y se describen mediante ecuaciones en diferencias.

2.1.4 Métodos de Obtención de Modelos

Lopez Guillen (2010), menciona que existen dos métodos principales para la obtención del modelo de un sistema:

1. *Modelado Teórico*: Tiene un campo de aplicación restringido a procesos sencillos de modelar o aplicaciones que no requieran gran exactitud en el modelo obtenido, se basa en el conocimiento físico de planta y que solo se puede experimentar sobre el sistema real. Por lo general, este procedimiento de identificación de sistemas presenta las siguientes desventajas:
 - a) Restringido a procesos sencillos.
 - b) Puede poseer un conjunto de parámetros desconocidos lo cual complica su obtención.
2. *Identificación Experimental*: Se trata de un método experimental que permite obtener el modelo de un sistema a partir de sus datos reales recogidos en plantas bajo estudio. Se pueden tener las siguientes desventajas:
 - a) Su rango de validez suele ser limitado.
 - b) Es muy difícil captar un significado físico del modelo obtenido.

2.1.5 Identificación Experimental de Modelos

El objetivo de la identificación de modelos es lograr una descripción matemática de la dinámica de los sistemas, lo que es una parte fundamental en el diseño de controladores. La mayoría de modelos se comportan de manera no lineal lo que conlleva un estudio de mayor complejidad. Se necesita una adaptación de una metodología y un proceso experimental (Figura 2-2) usando recursos de software y hardware disponibles en laboratorio para generar un modelo matemático experimental que permita la aplicabilidad de un controlador.

2.1.6 Identificación de Sistemas

Es una forma experimental utilizada para obtener un modelo que reproduzca con exactitud las características dinámicas del proceso objeto de estudio. Para Lopez Guillen (2010), el Proceso de Identificación, comprende los siguientes pasos:

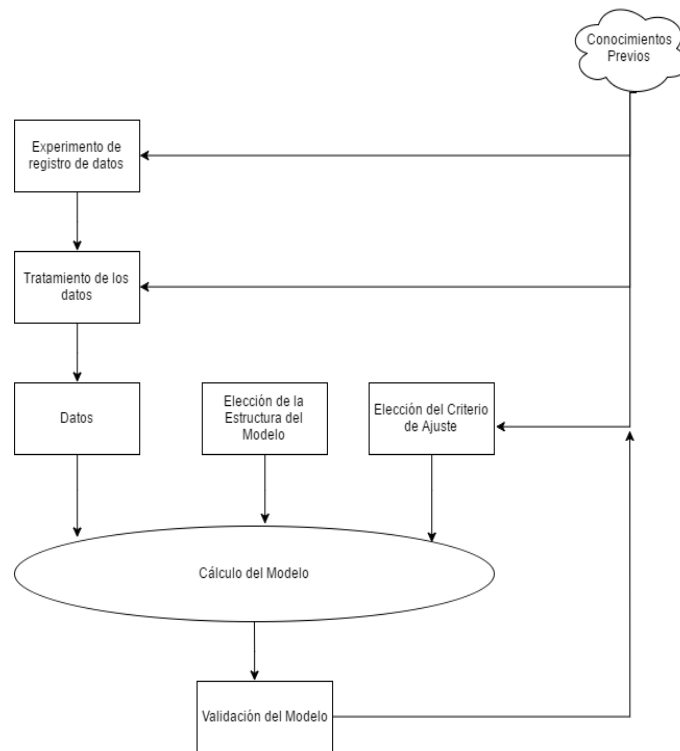


Gráfico 2-2: Proceso para Modelar una Planta Experimental

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

1. *Obtención de Datos de entrada:* Excitar el sistema mediante la aplicación de una señal de entrada y registrar la evolución de sus entradas y salidas durante un intervalo de tiempo.
2. *Tratamiento Previo de los datos registrados:* Depurar los datos registrados, generalmente acompañados de ruidos indeseados u otro tipo de imperfecciones, esto es necesario corregir antes de iniciar la identificación del modelo. Es un proceso de preparación de datos.
3. *Elección de la estructura del modelo:* Si el modelo es paramétrico, se debe determinar la estructura deseada para dicho modelo.
4. *Obtención de los parámetros del modelo:* Se procede a una estimación de la estructura que mejor ajusta la respuesta del modelo a los datos de entrada y salida obtenidos experimentalmente.
5. *Validación:* Determinar si el modelo obtenido satisface el grado de exactitud requerido. Si se obtiene un resultado no válido puede ser por los siguientes aspectos:
 - a) El conjunto de datos de entrada y salida no proporciona la suficiente información sobre la dinámica del sistema.

- b) La estructura escogida no es capaz de proporcionar una buena descripción del modelo.
- c) El criterio de ajuste de parámetros seleccionados no es el mas adecuado.

2.2 Convolución de Funciones

Se define una función $f(t)$ y la función $g(t)$ estas dos convolucionan y se definen por la ecuación 1 como:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad (1)$$

El resultado de esta operación genera otra función que representa la magnitud en la que se superponen y una forma especular de g . De manera práctica, si se define a $f(t)$ como una función rampa de la forma mostrada en la figura 3-2.

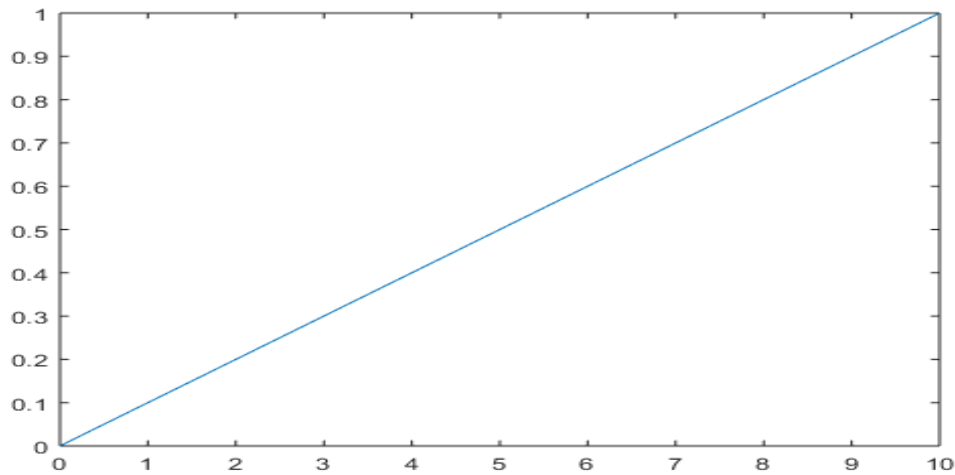


Gráfico 3-2: Función $f(t)$

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

También se define la función $g(t)$ como una función paso escalón unitario de la forma mostrada en la figura 4-2.

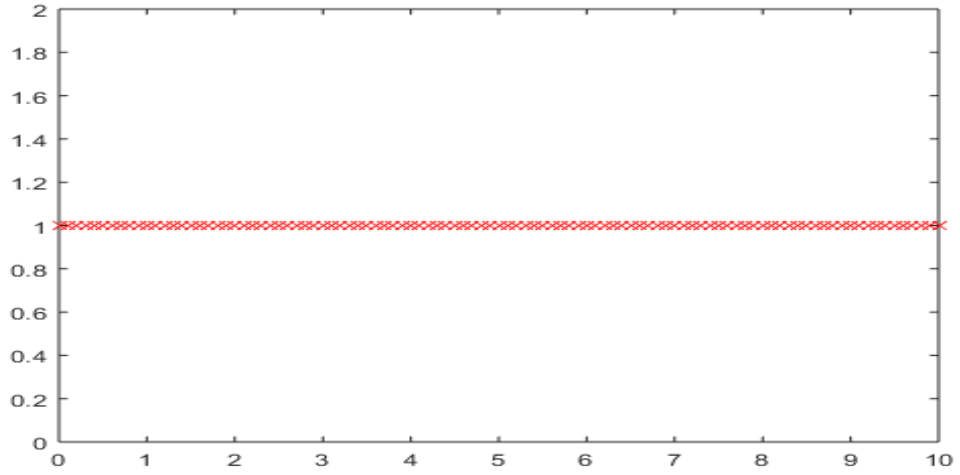


Gráfico 4-2: Función escalón unitario.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

Se procede a definir la variable τ como operador con el objetivo que la variable t se un número, por lo tanto se define en la ecuación 2

$$f(t - \tau); g(\tau) \quad (2)$$

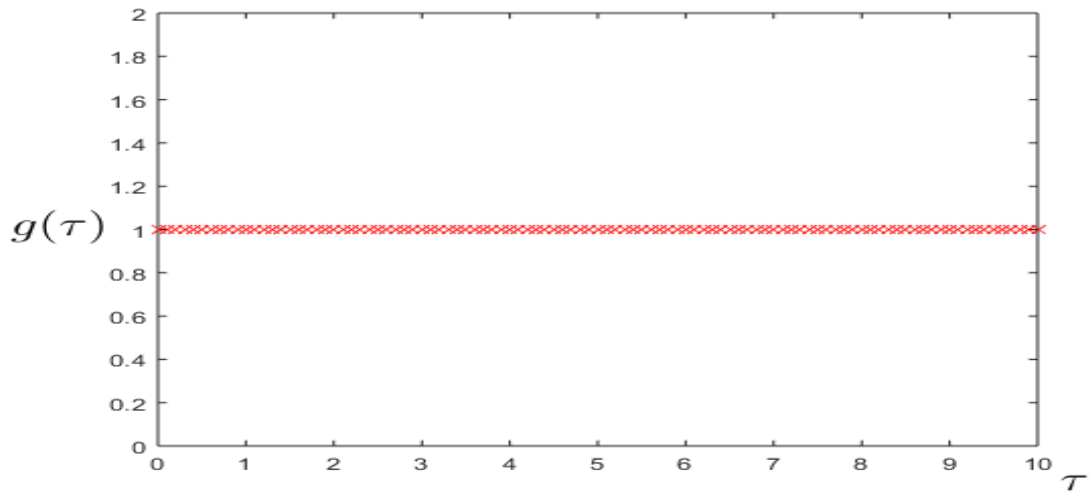


Gráfico 5-2: Función escalón unitario con la variable τ

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

Por lo tanto para $t=0$.

$$f(0 - \tau) = f(-\tau) \quad (3)$$

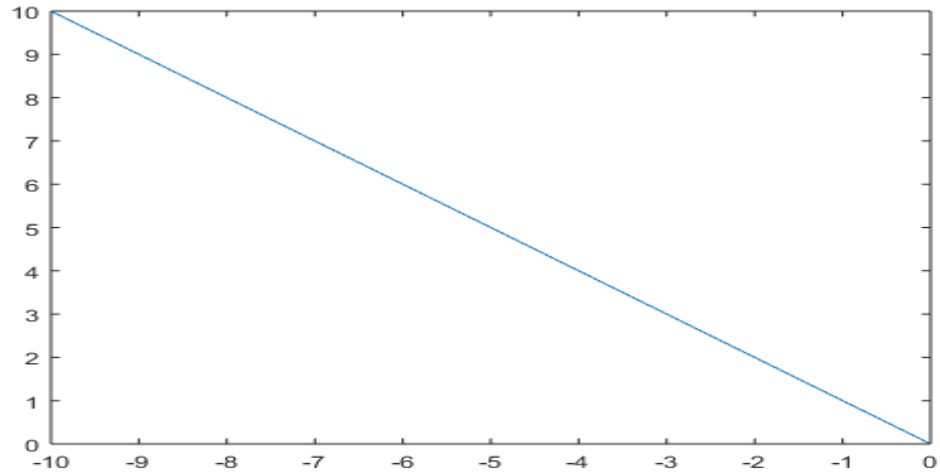


Gráfico 6-2: Función $f(-\tau)$, función espejadora de $f(\tau)$

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

Por lo tanto para $t=1$.

$$f(t - \tau) = f(1 - \tau) \quad (4)$$

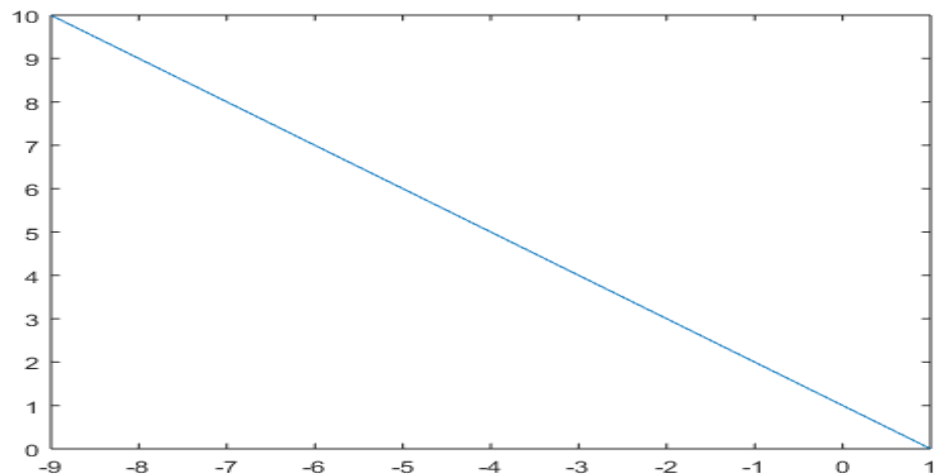


Gráfico 7-2: Función $f(-\tau)$, cuando $t=1$, desplazada en el tiempo.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

2.3 Controladores Enteros

El Control Entero es la técnica de control más antigua y tradicional. La síntesis y realización de estos controladores empezó a inicios del Siglo XX, uno de los primeros controladores PID fue desarrollado por Elmer Sperry en 1911, por otra parte, el primer análisis teórico del PID lo hizo Nicolas Minorsky en 1922. (Daou and Moreau, 2014)

2.3.1 Controlador PID

El controlador PID es el controlador más antiguo, sin embargo, en la actualidad es uno de los más empleados. Este controlador actúa sobre la señal de error del sistema, se compone de un término proporcional (P), un término integral de orden 1 (I) y un término derivativo de orden 1 (D). Mediante el PID es posible rechazar perturbaciones en el sistema, la acción integral reduce el error en estado estacionario y la acción derivativa de cierta forma predice errores futuros. Existen dos tipos de arreglo del controlador PID:

1. *Arreglo en cascada (Figura ??)*: la ecuación 5 representa la parte matemática de la configuración en cascada:

$$F_{PID}(s) = K_P(1 + \frac{1}{T_i s})(1 + T_d s)E(s) \quad (5)$$

Donde T_i y T_d corresponden a la constante de tiempo integral y derivativa, respectivamente; y K_P es la constante proporcional.

2. *Arreglo en paralelo (Figura 8-2)*: su función de transferencia es la siguiente:

$$F_{PID}(s) = K_P + (1 + \frac{1}{T_i s}) + (1 + T_d s) \quad (6)$$

Donde T_i (K_i) y T_d (K_d) corresponden a la constante de tiempo integral y derivativa, respectivamente; y K_P es la constante proporcional.

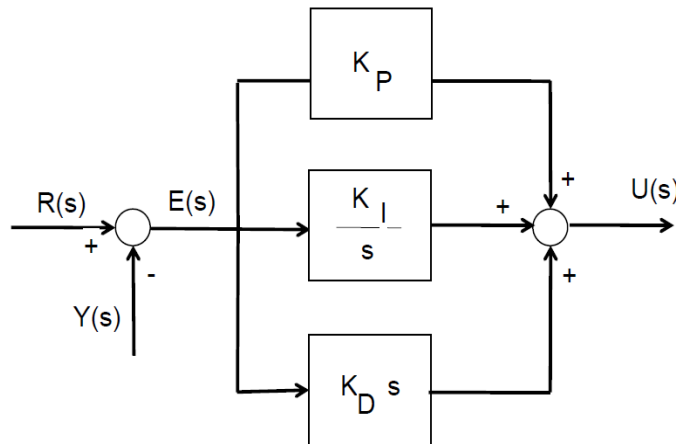


Gráfico 8-2: Controlador PID Paralelo

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

2.3.2 Método de sintonización de Ziegler and Nichols

El primer método de Ziegler-Nichols consiste en conocer la respuesta a un escalón *ver figura 9-2* caracterizado por dos parámetros L y T obtenidos a través de la respuesta en lazo abierto. Los parámetros fundamentales del control se pueden obtener a través de uso del cuadro que se muestra a continuación:

Tabla 1: Ziegler-Nichols para determinar los parámetros de un controlador entero

CONTROLADOR	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$	0	0
PI	$0,9 \frac{T}{L}$	$\frac{0,3}{L}$	0
PID	$\frac{1,2}{a}$	$2L$	$\frac{L}{2}$

De modo que a partir de la respuesta del sistema en lazo abierto se calculará de manera gráfica los parámetros del control apropiados para el sistema.

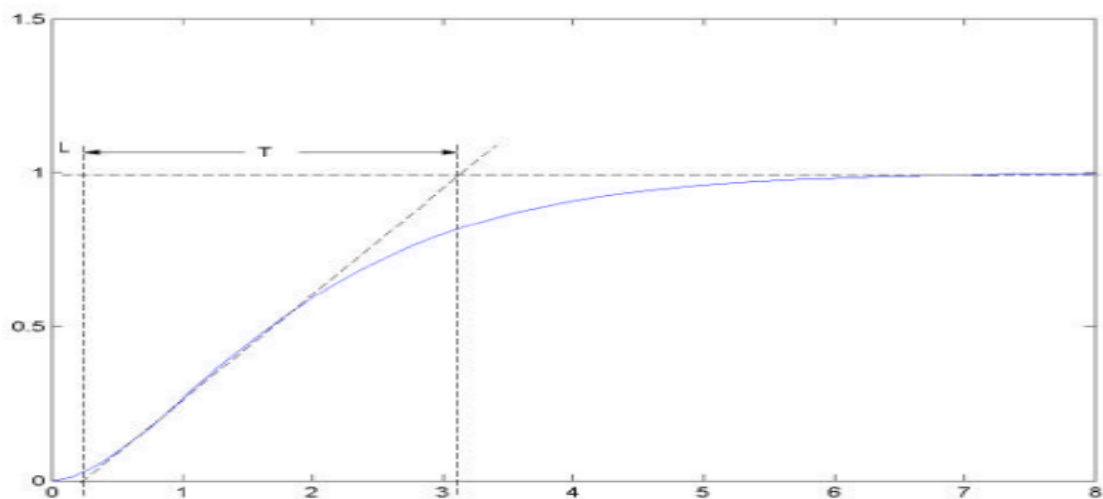


Gráfico 9-2: Representación Geométrica del método de Sintonización Ziegler-Nichols.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

2.4 Cálculo No Entero

2.4.1 Introducción

El Cálculo no Entero es un campo del estudio matemático que surge de las definiciones tradicionales de los operadores del cálculo integral y diferencial, en casi la misma forma en que el concepto de exponentes fraccionarios es una extensión de los exponentes de valor

entero. Por ejemplo, se puede verificar fácilmente que $x^3 = x * x * x$, pero ¿cómo se puede describir el significado de $x^{3,4}$?, no es posible contemplar que el valor sea igual a multiplicar un valor x por si mismo 3,4 veces, este valor es verificable por medio series infinitas o a través de una calculadora. En la misma forma se puede considerar para el cálculo integral y diferencial, completar n integraciones y derivaciones puede tornarse algo metódico como una multiplicación, pero entonces surge la pregunta: *¿qué pasaría si n no fuera estrictamente un valor entero?*.(Loverro, 2004)

La idea de manipular de manera no entera derivadas e integrales se remonta hace mas de trescientos años, para aquellas épocas el cálculo no entero carecía de herramientas que ayuden a su comprensión. Es por eso que a ésta teoría la consideraban como "lejana de la realidad". A pesar de eso muchos fenómenos físicos eran fáciles de describir si se consideraban desde un punto de vista no entero. El cálculo de de orden fractal permite la descripción de una manera más real y con mayor precisión que los métodos enteros.

El cálculo no entero fue considerado por primera vez en una carta que envió L'Hospital a Leibniz's en 1695, en la cual se menciona una pregunta que da paso a su estudio. L'Hospital escribe "*¿Qué sucedería si n fuera $\frac{1}{2}$?*", a lo que Leibniz replicó "*...esto conduciría a una paradoja, de la que algún día se extraerán consecuencias útiles*". En 1697, Leibniz hizo referencia a la fórmula de Wallis para π , el cual consiste en un producto infinito:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \frac{9}{8} \dots \quad (7)$$

Afirmó que se podía reemplazar la serie usando el cálculo diferencial con la notación $d^{\frac{1}{2}}$ para expresar una derivada de orden $\frac{1}{2}$. Existen varias definiciones de cálculo no entero enfocadas a la resolución de integrales y derivadas fractales, entre las mas importantes se pueden considerar:

1. Definición de Integral Fractal
2. Operador Fractal Diferencial de Riemann-Liouville.
3. Operador Fractal Diferencial de Caputo.
4. Operadores Fractales de Grünwald-Letnikov.
5. Función de Mittag-Leffler.

2.4.2 Definición de Integración No Entera

En (8) se presenta la fórmula de Cauchy para la integración repetitiva

$$J^n f(t) := \int_a^t \int_a^{\tau_1} \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau) d\tau \cdots d\tau_2 d\tau_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{n-1} d\tau \quad (8)$$

Para $n \in \mathbb{N}$, $a, t \in \mathbb{R}$, $t > a$. Si n es substituido por un número real positivo α y $(n-1)!$ por su generalización $\Gamma(\alpha)$, se obtiene una fórmula para la integración fractal.

Suponer que $\alpha > 0$, $t > a$, $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$. El siguiente operador fractal es conocido como la Integración Fractal de Riemann-Liouville de orden α :

$$J^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \quad (9)$$

Propiedades

Ishteva (2005), menciona varias propiedades de la integración fractal. Por convención

$$J^0 f(t) = f(t), \quad (10)$$

A partir de ésto se puede decir que $J^0 = I$ es el operador identidad.

Otra propiedad adicional es la linealidad:

$$J^\alpha (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda J^\alpha f(t) + J^\alpha g(t), \alpha \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{C} \quad (11)$$

Si la función $f(t)$ es continua para $t \geq 0$, las siguientes igualdades se cumplen

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} J^\alpha f(t) = f(t) \quad (12)$$

$$J^\alpha (J^\beta f(t)) = J^\beta (J^\alpha f(t)) = J^{\alpha+\beta} f(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{C} \quad (13)$$

Una propiedad adicional de la integral fractal, aparece con la introducción de la función

$$\Phi_a = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Rightarrow \Phi_\alpha * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau \quad (14)$$

t_+ hace referencia a que la función no tiene valores para $t \leq 0$, y de esta forma es una función causal. A partir de la definición de la Convolución de Laplace, se sigue que

$$J^\alpha f(t) = \Phi_\alpha(t) * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (15)$$

En (15) se muestra que la integral fractal puede expresada como la convolución de los términos Φ_α y $f(t)$. Por otra parte, La Transformada de Laplace de $t^{\alpha-1}$ está dada por

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha} \quad (16)$$

De esta forma, considerando la relación de convolución de la integral fractal a través de Φ_α (15) y la Transformada de Laplace de la misma, la *Transformada de Laplace de la integral fractal* es:

$$\mathcal{L}\{J^\alpha\} = s^{-\alpha}F(s) \quad (17)$$

2.4.3 Operador Fractal Diferencial de Riemann-Liouville

Suponiendo que $\alpha > 0, t > a, \alpha, a, t \in \mathbb{R}$, el operador fractal diferencial de *Riemann-Liouville* de orden α se define como

$$D^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, & n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (18)$$

Propiedades

El operador fractal diferencial de Riemann-Liouville, suele ser mencionado como el operador inverso de la integración fractal (??), es decir $D^\alpha J^\alpha = I$. Ishteva (2005), menciona varias propiedades de este operador. Por convención se define

$$D^0 f(t) := f(t) \quad (19)$$

A partir de ésto se puede decir que $D^0 = I$ es el operador identidad.

1. Representación

Teniendo $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ y $D^\alpha f(t)$ de $f(t)$ existe, entonces

$$D^\alpha f(t) = D^n J^{n-\alpha} f(t) \quad (20)$$

Esto significa que este operador es equivalente a la derivada de orden n luego de la integral de $(n-\alpha)$ repeticiones.

2. Interpolación

Teniendo $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ y $D^\alpha f(t)$ de $f(t)$ existe, se definen las siguiente propiedades de interpolación

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} D^\alpha f(t) &= f^{(n)}(t), \\ \lim_{\alpha \rightarrow n-1} D^\alpha f(t) &= f^{(n-1)}(t). \end{aligned} \quad (21)$$

3. Linealidad

Teniendo $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ y $D^\alpha f(t)$ y $D^\alpha g(t)$ de $f(t)$ y $g(t)$ existen, se puede decir que este operador es lineal, es decir satisface

$$D^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + D^\alpha g(t) \quad (22)$$

4. No Conmutativa

Teniendo $n - 1 < \alpha < n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $D^\alpha f(t)$ de $f(t)$ existe, entonces

$$D^m D^\alpha f(t) = D^{\alpha+m} f(t) \neq D^\alpha D^m f(t) \quad (23)$$

Es decir, el operador fractal diferencial de Riemann-Liouville no es conmutativo.

5. *Transformada de Laplace* La transformada de Laplace del operador fractal diferencial de Riemann-Liouville de orden α , está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D^\alpha f(t); s\} &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[D^{\alpha-k-1} f(t) \right]_{t=0} \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left[D^k J^{n-\alpha} f(t) \right]_{t=0}, \quad n-1 < \alpha < n. \end{aligned} \quad (24)$$

2.4.4 Operador Fractal Diferencial de Caputo

El operador fractal diferencial de *Caputo*, considerado una alternativa al operador de Riemann-Liouville (Subsección 2.4.3), está definido por:

$$D_*^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, & n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (25)$$

Ishteva (2005), considera el siguiente problema de valor inicial, para mostrar la principal ventaja del uso del operador de Caputo,.

$$\begin{aligned} D_*^\alpha y(t) - \lambda y(t) &= 0, \quad t > 0, n-1 < \alpha < n \\ y^{(n)}(0) &= b_k, \quad k = 0, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (26)$$

En este caso, donde el operador de Caputo es aplicable, intervienen condiciones iniciales estándar en términos diferenciales de orden entero. Estas condiciones iniciales tienen una clara interpretación física, como una posición inicial $y(a)$ en el punto a , una velocidad inicial $y'(a)$, una aceleración inicial $y''(a)$, y así. Por otra parte, el operador de Caputo es restringido, debido a que requiere la existencia de la derivada de orden n de la función. Ventajosamente, la mayoría de las funciones en que se aplica el operador cumplen con este requerimiento, incluso, se suele suponer que esta condición ya está satisfecha.

Propiedades

Ishteva (2005), menciona algunas propiedades de este operador. Por convención se define

$$D_*^0 f(t) := f(t) \quad (27)$$

A partir de ésto se puede decir que $D_*^0 = I$ es el operador identidad.

1. Representación

Teniendo $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $D_*^\alpha f(t)$ de $f(t)$ existe, entonces

$$D_*^\alpha f(t) = J^{n-\alpha} D^n f(t) \quad (28)$$

Esto significa que este operador es equivalente a una integral de $(n - \alpha)$ repeticiones luego de la derivada de orden n .

2. Interpolación

Teniendo $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $D_*^\alpha f(t)$ de $f(t)$ existe, se definen las siguiente propiedades de interpolación para el operador de Caputo

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} D_*^\alpha f(t) &= f^{(n)}(t), \\ \lim_{\alpha \rightarrow n-1} D_*^\alpha f(t) &= f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0). \end{aligned} \quad (29)$$

3. Linealidad

Teniendo $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ y $D_*^\alpha f(t)$ y $D_*^\alpha g(t)$ de $f(t)$ y $g(t)$ existen, se puede decir que este operador es lineal, es decir satisface

$$D_*^\alpha (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda D_*^\alpha f(t) + D_*^\alpha g(t) \quad (30)$$

4. No Conmutativa

Teniendo $n - 1 < \alpha < n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $D_*^\alpha f(t)$ de $f(t)$ existe, entonces

$$D_*^\alpha D_*^m f(t) = D_*^{\alpha+m} f(t) \neq D_*^m D_*^\alpha f(t) \quad (31)$$

Es decir, el operador fractal diferencial de Caputo no es conmutativo.

5. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace del operador fractal diferencial de Caputo de orden α , está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{D_*^\alpha f(t); s\} &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad n - 1 < \alpha < n. \end{aligned} \quad (32)$$

2.4.5 Operadores Fractales de Grünwald-Letnikov

Reimann y Louisville (Subsección 2.4.3) enfocaron su análisis no entero hacia el cálculo de una expresión que represente la integral fractal usando expresiones de integración repetida de la misma forma se desarrollo la derivada. A.K. Grünwald y Letnikov (GL) desarrollaron un método denominado *Differintegral* su definición se basa en el método para resolver integrales análogas.

Garrappa (2015), expresa que el operador GL está basado en un concepto clásico y tradicional del cálculo y consiste en que las derivadas e integrales pueden ser representados como límites de diferencias finitas. Usando la premisa $y \in C^m([0, T])$ y $m \in \mathbb{N}$, así es posible obtener la derivada m de y en $t \in (0, T]$ mediante

$$D^m y(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} y(t - kh) \quad (33)$$

Los coeficientes binomiales están definidos de acuerdo a:

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \quad (34)$$

Y pueden ser generalizados en base a argumentos reales mediante la función de Euler:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0 \quad (35)$$

El resultado de la ecuación para un valor de $\Gamma(1) = 1$ a $m \in \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ La función *Gamma* puede ser considerada como la generalización del factorial con argumentos reales y reemplazando m por cualquier número α positivo sus coeficientes son determinados mediante:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} \quad (36)$$

En la relación $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ se permite extender los valores para $z < 0$ donde $z \notin \{0, -1, -2, -3\}$ y α puede tomar valores similares. Bajo estos parámetros Grünwald-Letnikov determinan un operador diferencial ${}_0\bar{D}_t^{-\alpha}$ y se define como:

$${}_0\bar{D}_t^{-\alpha} y(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} h^\alpha \sum_{k=0}^N \omega_k^{(\alpha)} y(t - kh) \quad (37)$$

$${}_0\bar{I}_t^{-\alpha} y(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} h^\alpha \sum_{k=0}^N \omega_k^{(-\alpha)} y(t - kh) \quad (38)$$

La importancia del operador diferencial e integral de GL 37-38 en el cual $t \in (0, T]$, h depende de t y N está acorde a $h = \frac{t}{N}$, $y(t)$ es continuo para $t < 0$ y se considera para $\omega_k^{(\alpha)}$.

$$\omega_k^{(\alpha)} = (-1)^k \binom{\alpha}{k} \quad (39)$$

El operador ${}_0D_k^{(\alpha)}$ es conocida como el operador Grünwald-Letnikov (GL), cuya importancia radica no solo en el desarrollo histórico o teórico del cálculo fractal si no en aplicaciones prácticas. Es posible truncar la serie infinita generada mediante la siguiente aproximación:

$${}_0I_k^\alpha y(t_n) \approx h^\alpha \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}^{(-\alpha)} y(t - kh) \quad (40)$$

Donde $t_k = kh$, una manera de re formular la derivada fractal de Caputo en base al operador GL se define por:

$${}_0D_t^\alpha y(t_n) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}^{(\alpha)} [y_k - Y_{m-1}(t_k)] \quad (41)$$

Propiedades

El peso matemático que se le proporcione al operador GL debe satisfacer importantes propiedades en base a las siguientes proposiciones:

$$\begin{aligned} \omega_n^{(\alpha)} &= \binom{n - \alpha - 1}{n} = \frac{\Gamma(n - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n + 1)} \\ \omega_0^{(\alpha)} &= 1, \omega_n^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha + 1}{n}\right) \omega_{n-1}^{(\alpha)} \end{aligned} \quad (42)$$

1. Para cualquier α real $0 < \xi < 1$, entonces:
2. Para $0 < \alpha < 1$, entonces:
3. Para $-1 < \alpha < 0$, entonces:

2.4.6 Función de Mittag-Leffler

Loverro (2004), expresa que, la función de *Mittag-Leffler*, tiene una gran aplicabilidad en el mundo del cálculo fractal. De la misma forma en que la función exponencial (e^x) aparece en

la solución de ecuaciones diferenciales de orden entero, la función de Mittag-Leffler cumple un rol similar en la solución de ecuaciones diferenciales de orden no entero. La forma estándar de la función de Mittag-Leffler se define como

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (43)$$

La función exponencial (e^x) corresponde a $\alpha = 1$, en la Figura 10-2 se muestra el comportamiento de la función de Mittag-Leffler para diferentes valores de α . También es común representar a esta función en dos argumentos, α y β , de la siguiente manera

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (44)$$

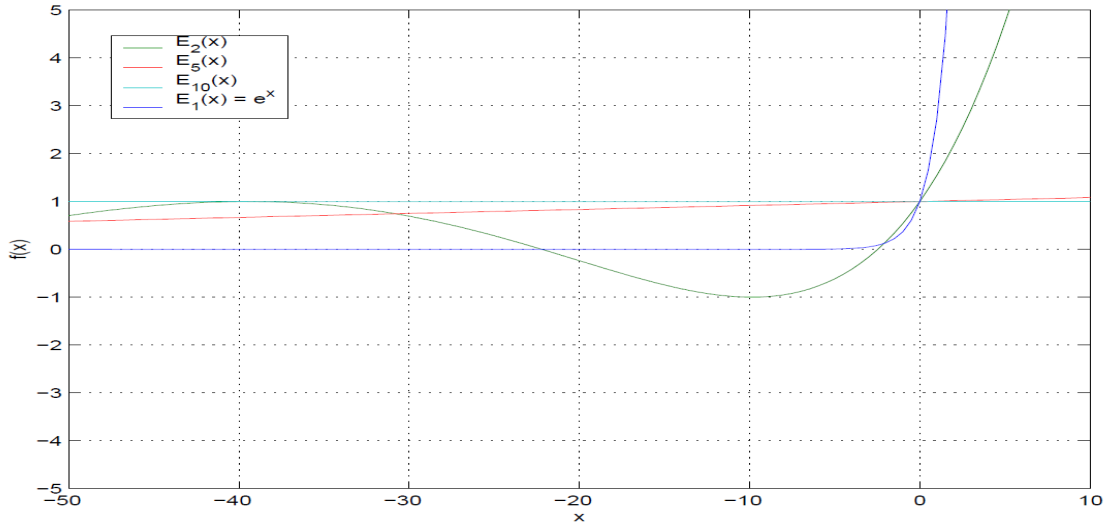


Gráfico 10-2: Comportamiento de la función de Mittag-Leffler.

Autor: Loverro (2004)

2.4.7 Control No Entero

En los últimos años se ha dado importancia al cálculo no entero en aplicaciones y diseño de controladores usando integrales y derivadas fractales, estos controladores están enfocados a manejar sistemas dinámicos en el cual el controlador o el sistema está descrito por ecuaciones diferenciales no enteras. Varios años luego de la aparición del controlador PID clásico, el controlador $PI^{\alpha}D^{\alpha}$ generalizado, en donde el orden de la diferenciación y la integración puede ser cualquier número positivo, real y menor que la unidad, fue propuesto respetando las reglas de sintonización de Ziegler y Nichols para PIDs enteros. Con el paso del tiempo, varios métodos de sintonización han sido propuestos con el fin de obtener valores óptimos del orden de integración y diferenciación. Recientemente, en las últimas décadas, fue introducido

el controlador CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier, Controlador Robusto de Orden No Entero) también basado en la integración y diferenciación fractal. De manera similar a la teoría de control clásico, en el modelado y simulación de sistemas y procesos basados en la descripción de propiedades no enteras es necesario la resolución de cada una de sus ecuaciones no enteras para obtener la respuesta a una entrada en particular. (Daou and Moreau, 2014)

Hoy en día, el manejo de sistemas y controladores fractales es muy común en casi todos los campos de la ingeniería. Daou and Moreau (2014) mencionan algunas de las principales razones de su uso:

1. Varias propiedades físicas, al ser modeladas usando función de transferencia, mostraron un comportamiento descrito mediante una ecuación diferencial de orden fractal. Por ejemplo interfaces térmicas difusas, actividades musculares, composición química de soluciones acuosas, visco elasticidad, polarización dieléctrica, cálculo mecánico cuántico, entre otros.
2. A través del manejo de controladores fractales es posible esbozar de una manera mucho más real los modelos de sistemas mecánicos, eléctricos e híbridos; analizar sus propiedades y comportamiento.
3. La implementación de controladores fractales, digitales o analógicos, es sencilla.
4. Una vez definidos el funcionamiento de lazo abierto del sistema y las especificaciones del usuario, la sintonización del controlador fractal no resulta complicada.

2.4.8 Sistemas Dinámicos de Orden Fractal

Previo a la revisión de los controladores no enteros, es preciso realizar un análisis de los *Sistemas Dinámicos de Orden Fractal*, los cuales se definen a través de ecuaciones diferenciales de orden no entero. Este análisis parte de los modelos de entrada-salida en diferentes dominios (tiempo, Laplace) para el estudio de su rendimiento en estado transitorio y estacionario, tomando en cuenta criterios y condiciones de estabilidad, y determinando la constante de error en estado estacionario. (Monje et al., 2010)

2.4.9 Modelos y Representación

Vinagre and Monje (2006) expresan que, las ecuaciones de orden fractal para sistemas dinámicos continuos en el tiempo, pueden ser escritas de la forma

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{\alpha_k} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{\beta_k} u(t) \quad (45)$$

En (45) es posible considerar dos casos particulares de donde se derivan dos tipos de sistemas, *Sistemas de Orden Conmensurable* y *Sistema de Orden Racional*.

Si en la ecuación (45) todos los órdenes de diferenciación son múltiplos enteros de un orden base, α , es decir, $\alpha_k, \beta_k = k\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el sistema será de orden conmensurable, y queda definido por

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{k\alpha} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D^{k\alpha} u(t) \quad (46)$$

Si en (46) $\alpha = 1/q$, $q \in \mathbb{Z}^+$, el sistema será de orden racional.

Para obtener la relación entrada-salida de un sistema fractal, se aplica la transformada de Laplace a (45), considerando condiciones iniciales nulas, obteniendo de esta forma su función de transferencia en tiempo continuo

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^{\beta_k}}{\sum_{k=0}^n a_k s^{\alpha_k}} \quad (47)$$

En el caso de sistemas de orden conmensurable, la función de transferencia queda expresada como sigue:

$$[H]G(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (s^\alpha)^k} \quad (48)$$

La que puede ser considerada como una función pseudoracional, $H(\lambda)$, de la variable $\lambda = s^\alpha$

$$H(\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k \lambda^k}{\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k} \quad (49)$$

2.4.10 Estabilidad

El análisis de la estabilidad de un sistema de orden no entero es posible realizarlo a partir de su función de transferencia. Monje et al. (2010), menciona que para esto es necesario

hacer referencia a una función del tipo:

$$a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad (50)$$

Esta es una función multivaluada de la variable compleja s cuyo dominio se puede observar como una *Superficie de Riemann* (Figura 11-2) de un número finito de *hojas* solo para el caso de $\forall i, \alpha_i \in \mathbb{Q}^+$, siendo la hoja principal definida por $-\pi < \arg(s) < \pi$. En el caso de $\alpha_i \in \mathbb{Q}^+$, donde $\alpha = 1/q$, y q es un entero positivo, las q hojas de la superficie de Riemann son determinadas por

$$s = |s|e^{j\phi}, \quad (2k+1)\pi < \phi < (2k+3)\pi, \quad k = -1, 0, \dots, q-2. \quad (51)$$

En donde la *hoja principal* corresponde al caso $k = -1$. Para la representación gráfica de $w = s^\alpha$, las hojas se transforman en las regiones del plano complejo w definido por

$$w = |w|e^{j\theta}, \quad \alpha(2k+1)\pi < \theta < \alpha(2k+3)\pi \quad (52)$$

En las siguientes figuras se muestra la superficie de Riemann y las regiones del plano complejo w correspondientes a cada hoja de la superficie para el caso de $w = s^{1/3}$

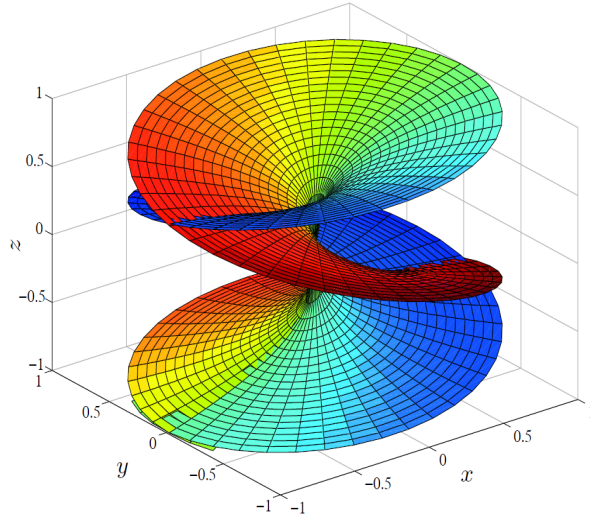


Gráfico 11-2: Superficie de Riemann para $w = s^{1/3}$

Autor: Loverro (2004)

Considerar una ecuación del tipo

$$a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0} = 0 \quad (53)$$

la cual tendrá infinito número de raíces, de las cuales un determinado número se encontrarán en la hoja principal de la superficie de Riemann. Se puede decir que las raíces ubicadas en

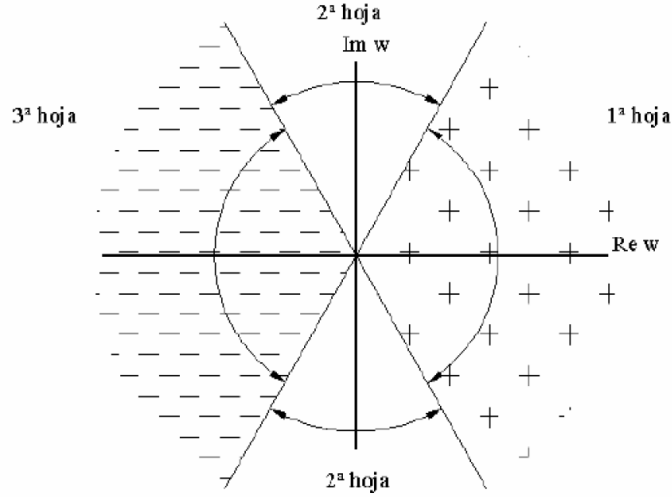


Gráfico 12-2: Regiones del plano w superficie de Riemann para $w = s^{1/3}$

Autor: Loverro (2004)

las hojas secundarias de la superficie de Riemann están relacionadas a soluciones que corresponden siempre a funciones monótonas decrecientes (tienden a cero si oscilaciones cuando $t \rightarrow \infty$). Por otra parte, únicamente las raíces localizadas en la hoja principal de la superficie de Riemann generan una dinámica distinta: oscilación amortiguada, oscilación de amplitud constante, oscilación de amplitud creciente o crecimiento monótono; a las raíces pertenecientes a esta hoja se las conoce como *raíces estructurales* o *raíces relevantes*. (Vinnagre and Monje, 2006)

Condiciones de estabilidad

Respecto a las condiciones de estabilidad, en general, se puede decir que un sistema de orden fractal, con una función de transferencia de orden no racional $G(s) = P(s)/Q(s)$, es estable para un determinadas entradas y salidas, si se cumple que

$$\exists M, |G(s)| \leq M, \forall s/\Re(s) \geq 0 \quad (54)$$

Esta condición se satisface si todas la raíces de $Q(s) = 0$ en la hoja principal de la superficie de Riemann no pertenecen a la solución de $P(s) = 0$ y su parte real es negativa. Para el caso de sistemas de orden conmensurable, donde su ecuación característica es un polinomio de la variable compleja $\lambda = s^\alpha$, la condición de estabilidad se expresa como

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad (55)$$

donde λ_i son las raíces del polinomio característico en λ .

Criterios de Estabilidad

Vinagre and Monje (2006) mencionan que para el análisis de la estabilidad de los sistemas fractales, se debe recurrir a técnicas geométricas de análisis complejo basadas en el principio del argumento, ya que son técnicas que dan cuenta de las singularidades de la función dentro de una curva rectificable observando la evolución del argumento de la función a lo largo de dicha curva. Para este fin, haciendo uso de la curva conocida como *camino de Nyquist*, la que encierra el semiplano derecho de la hoja principal de la superficie de Riemann, es posible determinar la estabilidad en lazo cerrado del sistema, sólo con encontrar el número de revoluciones de la curva resultante de la evaluación alrededor del punto crítico $(-1, j0)$.

2.4.11 Respuesta transitoria

De acuerdo a Monje et al. (2010), esta respuesta dependerá de las raíces de la ecuación característica, de donde se tienen seis casos:

1. No existen raíces en la hoja principal de Riemann, en este caso la respuesta corresponde a una función monótonamente decreciente.
2. Existen raíces en la hoja principal de Riemann, ubicadas en $\Re(s) < 0, \Im(s) = 0$, en este caso la respuesta corresponde a una función monótonamente decreciente.
3. Existen raíces en la hoja principal de Riemann, ubicadas en $\Re(s) < 0, \Im(s) \neq 0$, en este caso la respuesta corresponde a una función con oscilaciones amortiguadas.
4. Existen raíces en la hoja principal de Riemann, ubicadas en $\Re(s) = 0, \Im(s) \neq 0$, en este caso la respuesta corresponde a una función con oscilaciones de amplitud constante.
5. Existen raíces en la hoja principal de Riemann, ubicadas en $\Re(s) > 0, \Im(s) \neq 0$, en este caso la respuesta corresponde a una función con oscilaciones de amplitud creciente.
6. Existen raíces en la hoja principal de Riemann, ubicadas en $\Re(s) > 0, \Im(s) = 0$, en este caso la respuesta corresponde a una función monótonamente creciente.

Para sistemas de orden conmensurado, la respuesta al impulso $g(t)$ puede ser escrita como sigue

$$g(t) = \sum_{k=0}^n r_k t^{\alpha-1} \mathcal{E}_{\alpha,\alpha}(\lambda_k t^\alpha), \quad (56)$$

La respuesta al escalón, por otro lado, está dada por la expresión

$$g(t) = \sum_{k=0}^n r_k t^\alpha \mathcal{E}_{\alpha,\alpha+1}(\lambda_k t^\alpha). \quad (57)$$

La forma de estas respuestas puede ser:

1. Monótonamente decreciente si $|\arg(\lambda_k)| \geq \alpha\pi$
2. Oscilatoria con amplitud decreciente si $\alpha\pi/2 < |\arg(\lambda_k)| < \alpha\pi$
3. Oscilatoria con amplitud constante si $|\arg(\lambda_k)| = \alpha\pi/2$
4. Oscilatoria con amplitud creciente si $|\arg(\lambda_k)| < \alpha\pi/2$, $|\arg(\lambda_k)| \neq 0$
5. Monótonamente creciente si $|\arg(\lambda_k)| = 0$

2.4.12 Respuesta en estado estacionario

Vinagre and Monje (2006) expresan que los sistemas de orden fractal tienen coeficiente de error estático que son 0 ó ∞ , lo que muestra que su comportamiento, se relaciona con el comportamiento de sistemas de órdenes enteros mayores o menores que su orden fractal. Estos sistemas tendrán coeficientes finitos sólo para entradas cuya función de tiempo sea del tipo

$$r(t) = At^\gamma \quad (58)$$

o, en el dominio de Laplace

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = R(s) = A \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{s^{\gamma+1}}. \quad (59)$$

2.4.13 Especificaciones del Control No entero

Los controladores de orden fractal emplean operadores fraccionarios en su concepción, para ajustarse al comportamiento del sistema en que es aplicado y mejorar el rendimiento del mismo. Este tipo de controladores pueden ser diseñados para el control tanto de plantas de orden entero como plantas de orden fractal. (Hortelano, 2010)

Kumar (2013) menciona varias ventajas de los controladores fractales, sobre los controladores de orden entero:

1. Si el parámetro de un sistema controlado cambia, un controlador de orden fractal es menos sensible que un controlador PID clásico.
2. Los controladores fractal tienen variables adicionales que sintonizar, lo que significa la presencia más grados de libertad a las propiedades dinámicas del sistema.

Como ya se expuso anteriormente, con el paso del tiempo se han introducido dos tipos de controladores fractales, el $PI^\lambda D^\mu$ generalizado y el CRONE. La principal diferencia existente entre estos controladores mencionados radica en el número de parámetros requeridos para ser definidos: cinco para el $PI^\lambda D^\mu$ generalizado.

2.4.14 Acciones de Control no Enteras

Para el análisis de las acciones básicas de control fractales, Vinagre and Monje (2006) parte del diagrama de bloques de la Figura 13-2 para describir el efecto de las acciones de control del tipo Ks^μ para $\mu \in [-1, 1]$; en donde, para $\mu = 0$ se ejerce una acción proporcional, para $\mu = -1$ se ejerce una acción integral, y para $\mu = 1$ se ejerce una acción derivativa.

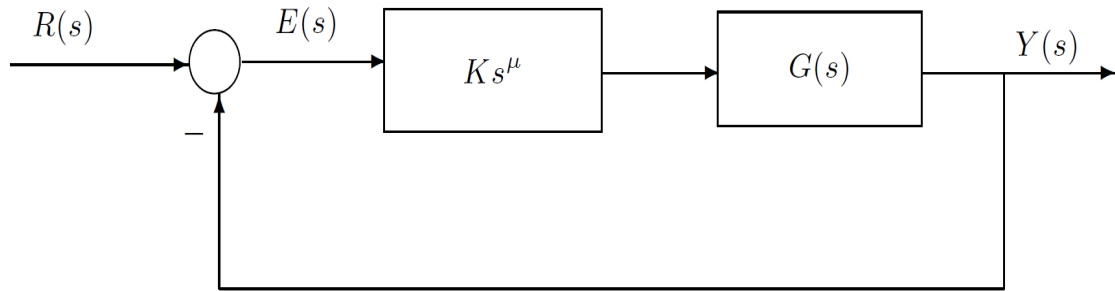


Gráfico 13-2: Sistema de lazo cerrado con acciones de control fractales

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

Acción integral

La acción integral se caracteriza por hacer al sistema lento, reducir la estabilidad relativa y eliminar el error en estado estacionario. El efecto de esta acción puede ser analizado en tres dominios:

1. En el *dominio del tiempo*, esta acción provoca la disminución del tiempo de subida y un aumento del tiempo establecimiento y el sobreimpulso. Al incluir un orden de integración fraccionario $\mu \in (-1, 0)$, el resultado de la acción de control sobre una señal de error cuadrada (Figura 14-2) varía entre los efectos de una acción proporcional ($\mu = 0$, señal cuadrada) y una acción integral ($\mu = -1$, curva de tramos rectos), para valores intermedios de μ , la acción es creciente para un error constante, lo que elimina el error en estado estacionario, y decrece cuando el error tiende a cero, lo que reduce la inestabilidad del sistema.
2. En el *plano complejo*, la acción integral desplaza el lugar de las raíces del sistema hacia

el semiplano derecho. La selección un orden fraccionario $\mu \in (-1, 0)$, afecta en el desplazamiento de lugar de las raíces hacia el semiplano derecho y en los valores que hacen cumplir la condición de magnitud.

3. En el *dominio de la frecuencia*, la acción provoca un aumento de $-20dB/dec$ en la pendiente del diagrama de magnitud y un descenso de $\pi/2$ en el diagrama de fase. Con la variación de μ entre -1 y 0 , se introduce un incremento constante entre $-20dB/dec$ y $0dB/dec$ en la pendiente del diagrama de fase, y 0 un retraso constante entre $-\pi/2$ y 0 en el diagrama de fase.

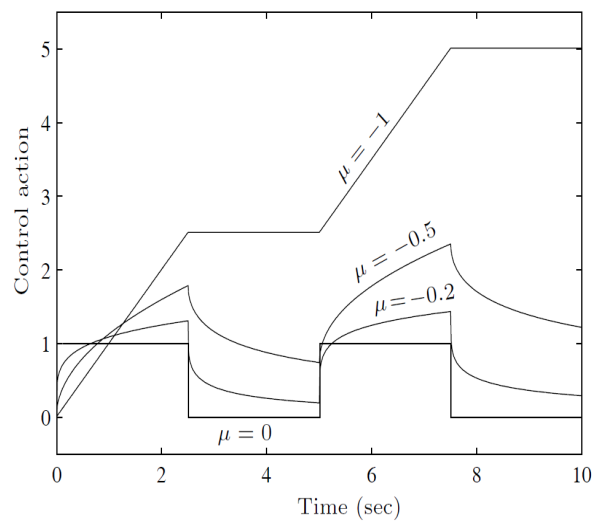


Gráfico 14-2: Acción integral sobre una señal de error.

Autor: Loverro (2004)

Acción derivativa La acción derivativa incrementa la estabilidad del sistema y tiende a acentuar los efectos de ruidos a alta frecuencia. Los efectos de la acción derivativa pueden ser analizados en los siguientes dominios:

1. En el *dominio del tiempo*, se genera una reducción en el sobre impulso y en el tiempo de establecimiento. Al incluir un orden de integración fraccionario $\mu \in (-1, 0)$, el resultado de la acción de control sobre una señal de error trapezoidal (Figura 15-2) varía entre los efectos de una acción proporcional ($\mu = 0$, señal trapezoidal) y una acción derivativa ($\mu = 1$, señal cuadrada). Para valores intermedios de μ , la acción de control corresponden a curvas intermedias. Se debe tener en cuenta que la acción derivativa no es cero para un error constante y el crecimiento de la señal de control es más amortiguada al producirse una variación en la señal de error, lo que implica una mejor atenuación de señales de ruido de alta frecuencia.

2. En el *plano complejo*, la acción derivativa produce un desplazamiento del lugar de las raíces del sistema hacia el semiplano izquierdo.
3. En el *dominio de la frecuencia*, esta acción genera un adelanto constante de fase de $\pi/2$ y un aumento de 20db/dec en las pendientes del diagrama de magnitud. Con la variación de μ entre -1 y 0 , se introduce un incremento constante entre -20dB/dec y 0db/dec en la pendiente del diagrama de fase, y 0 un retraso constante entre $\pi/2$ y 0 en el diagrama de fase.

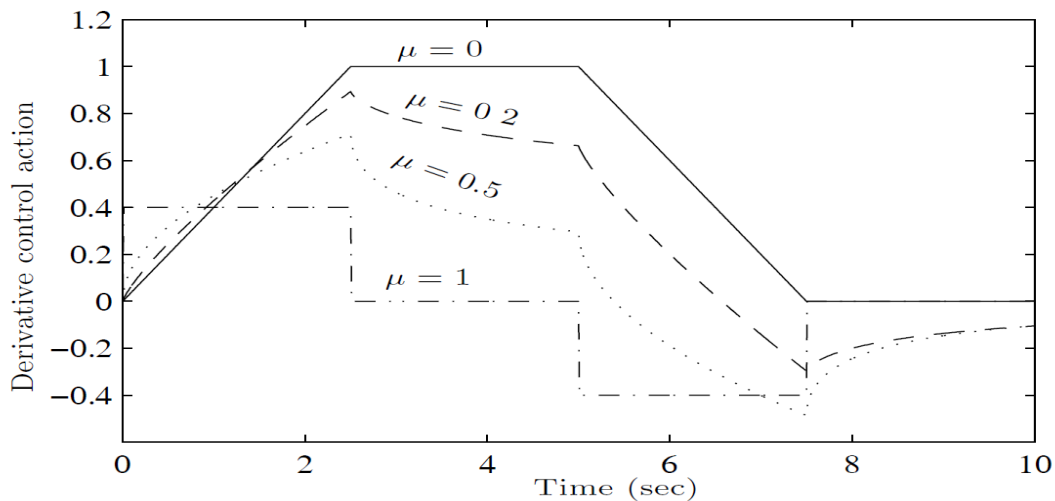


Gráfico 15-2: Acción derivativa sobre una señal de error trapezoidal

Autor: Loverro (2004)

2.5 Aproximaciones Numéricas

Las aproximaciones numéricas más comúnmente empleadas se utilizan para discretizar las ecuaciones diferenciales de un sistema analógico. Estas son:

1. Regla Trapezoidal o de Tustin.
2. Regla rectangular hacia adelante o de Euler.
3. Regla rectangular hacia atrás.

2.5.1 Aproximación de Euler

La regla rectangular hacia adelante aproxima una área bajo la curva usando sumatorias.

$$u(t) = K_1 \int_0^t e(t) dt \quad (60)$$

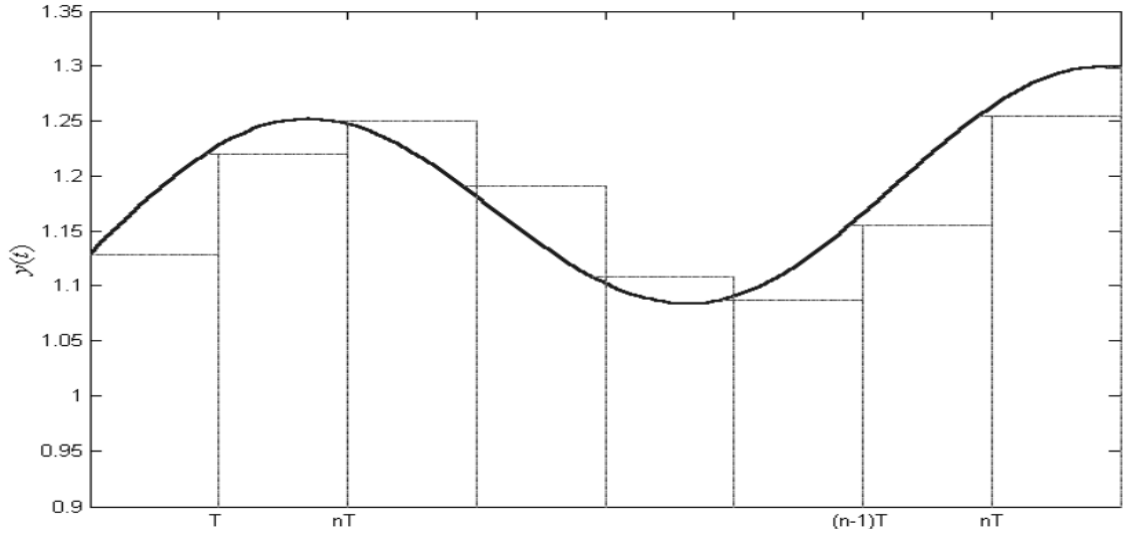


Gráfico 16-2: Aproximación de la Integral por Euler

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

Se define la ecuación que determina el algoritmo de posición de manera:

$$u_{nT} \cong K_1 T \sum_{i=0}^{n-1} e_{iT} \quad (61)$$

Su aplicación no es directa debido a que se requiere almacenar todas las muestras pasadas de una señal para aproximar su valor en un instante $t=nT$. Para esto se adiciona un algoritmo recurrente denominado de velocidad en el que solo es necesario almacenar algunas muestras.

Su ecuación es:

$$u_{nT} \cong K_1 T \sum_{i=0}^{n-2} e_{iT} + K_1 T e_{(n-1)T} \quad (62)$$

Se necesita obtener una acción de aplicación inmediata por lo tanto la ecuación anterior se puede reducir a:

$$u_{nT} \cong u_{(n-1)T} + K_1 T e_{(n-1)T} \quad (63)$$

Esta ecuación solo requiere del valor de la última señal representada por $e_{(n-1)T}$ y del resultado de la integral en el paso previo $u_{(n-1)T}$

2.5.2 Regla Rectangular hacia atrás

Se basa en la aproximación definida por la figura 64:

$$u_{nT} \cong K_1 T \sum_{i=0}^n E_{iT} \quad (64)$$

$$u_{nT} \cong K_1 T \sum_{i=0}^n E_{iT} + K_1 T E_{nT} \quad (65)$$

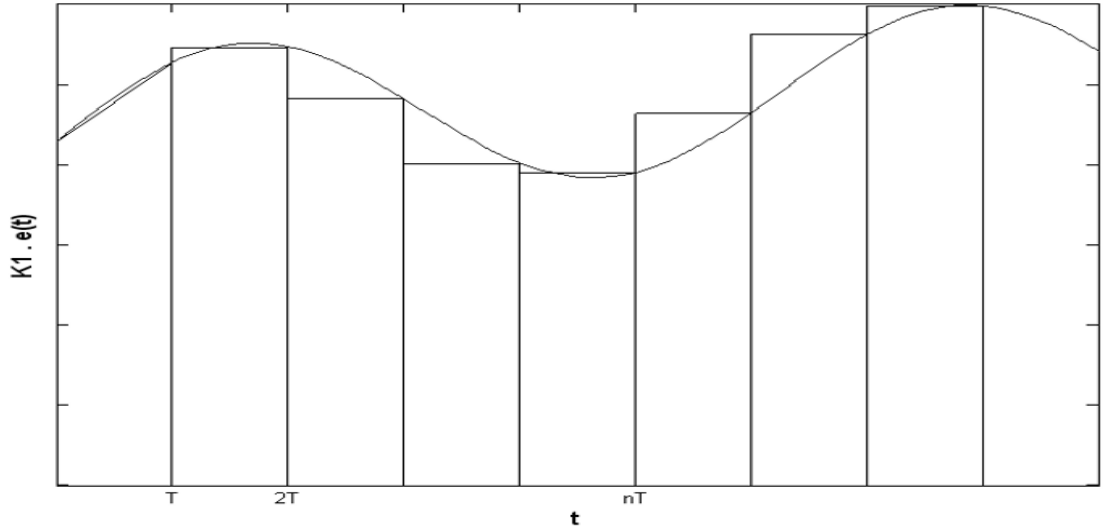


Gráfico 17-2: Aproximación de la Integral por la Regla de Rectángulos Inscritos

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

$$u_{nT} \cong K_1 T \sum_{i=0}^n e_{iT} \quad (66)$$

$$u_{nT} \cong u_{(n-1)T} + K_1 T e_{nT} \quad (67)$$

La diferencia con la aproximación anterior 2.5.1 es que esta utiliza la muestra actual de señal e_{nT} en lugar de la muestra anterior $e_{(n-1)T}$.

2.5.3 Aproximación de Tustin

La regla trapezoidal de Tustin es definida por la siguiente ecuación:

$$u_{nT} \cong \frac{T}{2} \sum_{i=0}^n [e_{(i-1)T} + e_{iT}] \quad (68)$$

luego:

$$u_{nT} \cong u_{(n-1)T} + \frac{T}{2} [e_{nT} + e_{(n-1)T}] \quad (69)$$

Esta regla utiliza para su cálculo de la integral en el instante actual, el resultado de la integral en el paso previo $u_{(n-1)T}$ y los valores actuales $e_{(nT)}$ y previo $e_{(n-1)T}$ de la señal.

2.5.4 Diferenciación hacia atrás

Esta es la aproximación más difundida para aproximar la derivada de una señal *ver figura 19-2*. La misma está dada por:

$$\frac{de(t)}{dt} \cong \frac{e(t) - e(t - T)}{T} \quad (70)$$

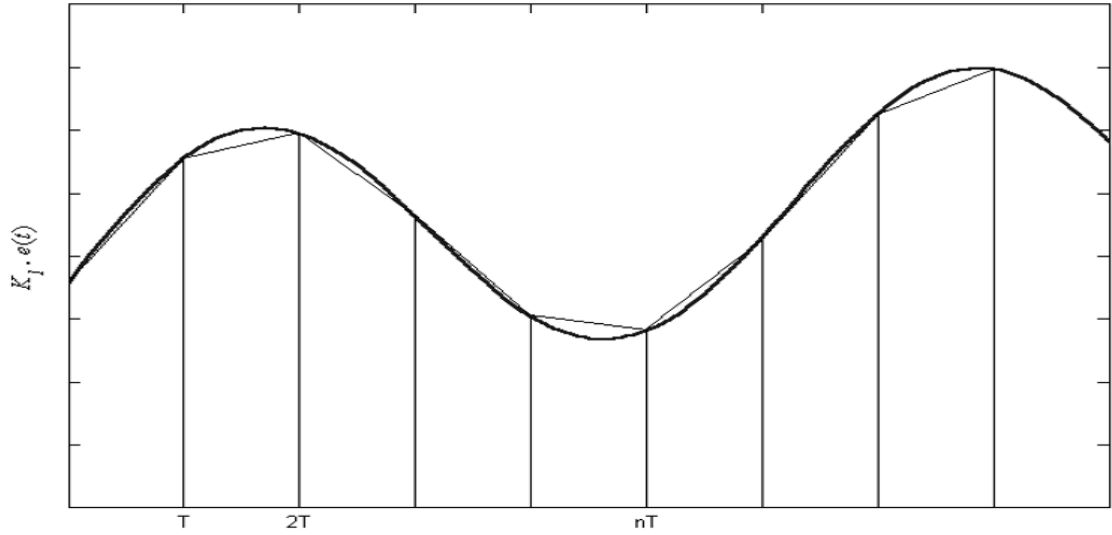


Gráfico 18-2: Aproximación de la Integral por la Regla Trapezoidal

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

La siguiente expresión solo requiere, para aproximar el valor de la derivada de una señal en un instante de tiempo nT , el conocimiento de dicho instante e_T y el instante de muestreo previo $e_{(n-1)T}$

$$\frac{de(t)}{dt} \cong \frac{e_{nT} - e_{(n-1)T}}{T} \quad (71)$$

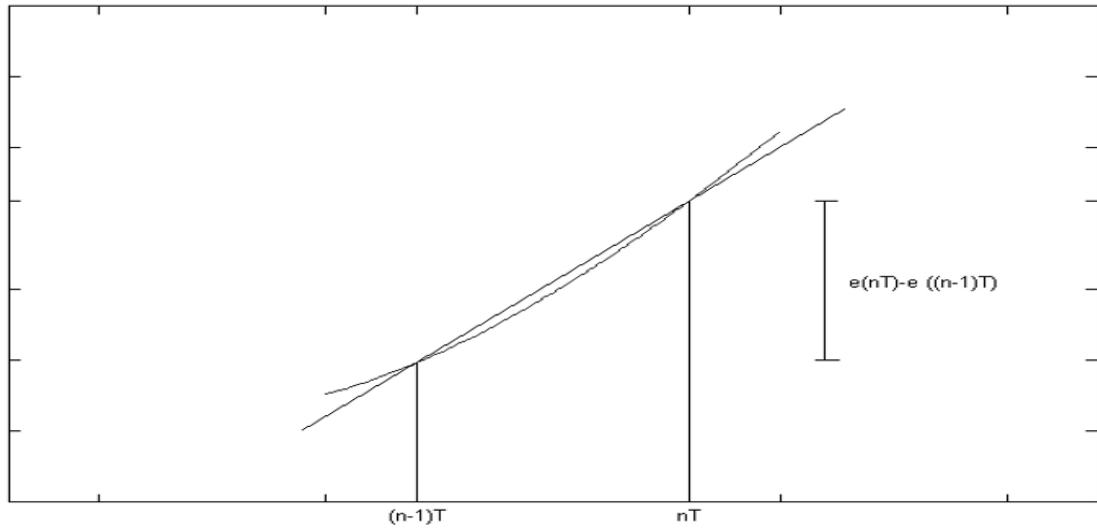


Gráfico 19-2: Aproximación de la Derivada

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

Las aproximaciones antes citadas son las más utilizadas para discretizar la ecuación integro-diferencial del controlador PID. Se puede realizar las aproximaciones en frecuencia compleja s :

1. Regla de Euler

$$s \cong e^{sT} - 1 \quad (72)$$

2. Diferencia hacia atrás

$$s \cong \frac{e^{sT} - 1}{Te^{sT}} \quad (73)$$

3. Regla de Tustin

$$s \cong \frac{2}{T} \frac{e^{sT} - 1}{e^{sT} + 1} \quad (74)$$

2.6 Optimización

La optimización es un método por el cual se debe encontrar el mejor resultado posible bajo ciertas circunstancias. La metodología de optimización es usada en muchas ciencias especialmente en la construcción diseño mantenimiento, financiera e ingeniería para la toma de decisiones para maximizar los beneficios o minimizar esfuerzos los cuales están basados en determinar de manera correcta variables específicas. Por o tanto optimizar es el proceso de encontrar las condiciones necesarias para proporcionar el máximo o mínimo valor a una función. Es conocido que si el punto x corresponde a el mínimo valor que puede tomar una función $f(x)$ el mismo punto corresponde a un máximo en la función $-f(x)$. Existen una variedad de métodos para optimizar problemas de manera eficiente y estos deben ser aplicados dependiendo de la complejidad de la optimización, algunos de estos son:

1. *Métodos basados en programas matemáticos*: Usados para encontrar los máximos y mínimos de una función bajo ciertas restricciones.
2. *Técnicas basadas en Procesos Estocásticos*: Empleadas para analizar problemas que están descritas mediante un conjunto de variables randómicas de las cuales se conocen su distribución.
3. *Métodos Estadísticos*: Usado en análisis experimental de datos para la construcción empírica de modelos. La existencia de los métodos de optimización se remonta desde el momento que se desarrollaron leyes como las de Newton, Lagrange y Cauchy, el desarrollo de métodos diferenciales para encontrar procesos de optimización fue gracias a la contribución matemática de Newton y Leibnitz. hoy en día se usan métodos matemáticos de optimización enfocados hacia el cálculo y desarrollar técnicas de control moderna, programación lineal, cuadrática y no lineal, métodos neuronales y teoría de juegos.

2.6.1 Optimización sin Restricciones

Se debe determinar los puntos máximos y mínimos de una función en presencia de ciertas condiciones en la decisión de variables usando ecuaciones o in ecuaciones. Las variables están definidas en \mathbb{R}^n , precisamente el método consiste en determinar el mínimo local de funciones diferenciales que describen problemas reales. Se puede establecer tres métodos de optimización:

1. *Método sin Derivadas*: búsqueda directa basadas en diferencias finitas.
2. *Método basado en la primera derivada*: método de la gradiente, conjugación directa y Quasi Newton.
3. *Método basado en la segunda derivada*

Búsqueda Lineal

Este método consiste en buscar α_k a lo largo de la dirección d_k . El efecto de convergencia y la velocidad de convergencia del algoritmo depende de los efectos de α_k

$$\phi_\alpha = f(\alpha_k + \alpha d_k) - f(x_k) \quad (75)$$

La derivada de ϕ_α con respecto a α está definido por:

$$\dot{\phi}(\alpha) = \nabla f(x_k + \alpha d_k)' d_k \quad (76)$$

2.6.2 Método de Gradiente

Consiste en seleccionar, en base a la dirección de búsqueda, la dirección del anti gradiente x_k .

$$d_k = -\nabla f(x_k) \quad (77)$$

Para todo (k) , la forma de minimizar la dirección de la derivado a lo largo del espacio Euclideo se define por la ecuación 78

$$-\frac{\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|} E \quad (78)$$

Se establece la dirección que reduce al mínimo la derivada, entre todas las direcciones con norma euclidiana unitaria, de hecho, la in ecuación de Schwarts, se representa en la ecuación

$$\left| \nabla(fx_k)'d \right| \leq \|d\|_E \|\nabla f(x_k)\|_E \quad (79)$$

El signo de igualdad se establece si y sólo si $d = \lambda \nabla f(x_k)$ con $\lambda \in \Re$ como consecuencia del problema:

$$\min_{\|E\|_{E=1}} \nabla f(x_k)'d \quad (80)$$

Cuya solución está definida por la ecuación 81

$$d_* = -\frac{\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|_E} \quad (81)$$

Por esta razón, el método de gradiente decreciente se denomina también el método de la máxima pendiente. El algoritmo de gradiente decreciente puede ser esquematizado en el diagrama de flujo de la figura 20-2:

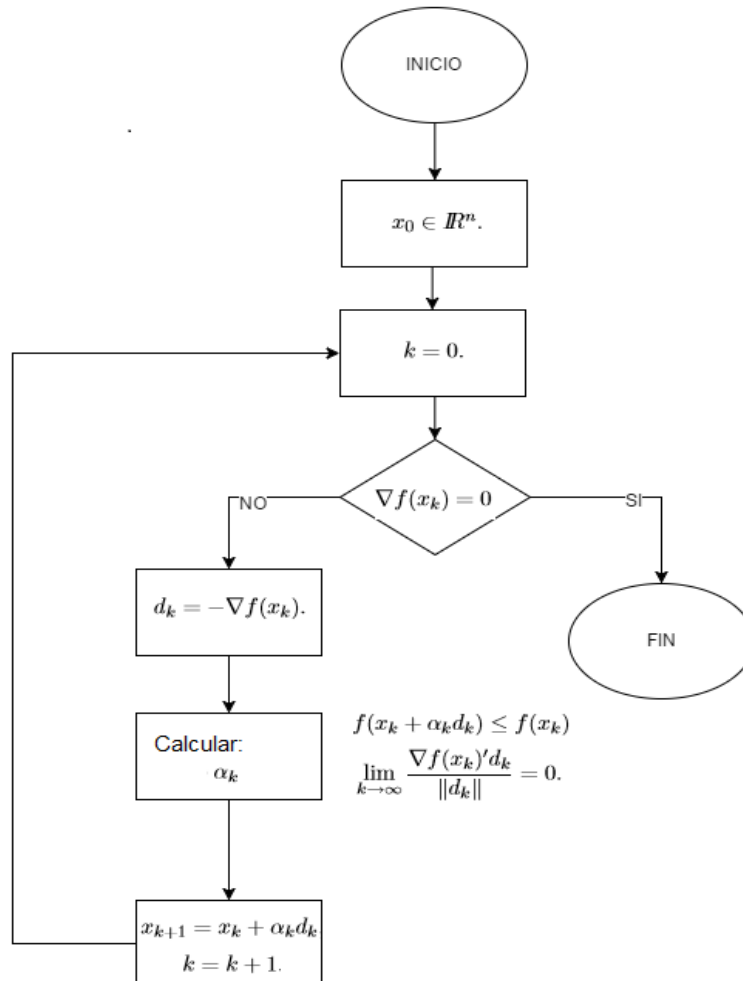


Gráfico 20-2: Esquema Diagrama de Flujo para el Cálculo de Gradiente Decreciente

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

La secuencia x_k es obtenida mediante el algoritmo:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad (82)$$

Considerar $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y asumir que ∇f es continuo y el nivel se establece en $L(f(x_0))$. Para cualquier acumulación en la secuencia x_k generado por el algoritmo del gradiente en un punto estacionario f como se observa en la figura ??

Para estimar la velocidad de convergencia del método se considera el comportamiento en la minimización de una función cuadrática, en este caso se representa mediante a ecuación 83

$$f(x) = \frac{1}{2} x' Q x + c' x + d \quad (83)$$

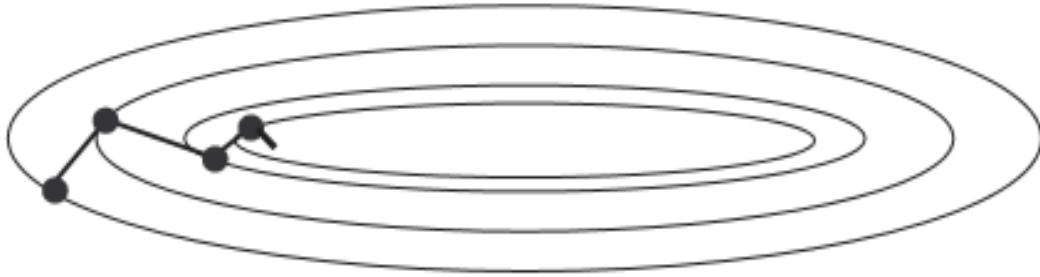


Gráfico 21-2: Comportamiento del algoritmo de Gradiente

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

Cuando se tienen expresiones no cuadráticas el rendimiento del gradiente decreciente es inaceptable.

2.7 Métodos de Discretización

El objetivo de discretizar sistemas o modelos es obtener mediciones del proceso en intervalos discretos y transmitir señales de control también en intervalos discretos. Se pueden describir cambios en señales de muestra a muestra sin importar su comportamiento, sin embargo sigue siendo continuo.

2.7.1 Representación en Variables de Estado

El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables que determinan el comportamiento del sistema en un tiempo $t \geq t_0$. Mediante este procedimiento se puede conocer su comportamiento n .

2.7.2 Variables de Estado

Conforman el conjunto más pequeño de variables que representa el estado de un sistema dinámico de orden n , por lo tanto se requieren n número de variables $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ y las evoluciones de las entradas para tiempos mayores a t_0 para describir completamente el comportamiento del sistema en un tiempo inicial. Las variables de estado pueden ser magnitudes física o matemáticas, medibles o no.

2.7.3 Espacio de Estado

Para la aplicación del método de variables de estado se trabaja con un conjunto pequeño de variables las cuales representan el estado de un sistema dinámico. La actuación de un sistema y su evolución dependerá de la señal de entrada para instantes $t \geq t_0$ y el valor de las variables para t_0 . Las variables de estado forman un vector denominado vector de estado y un espacio n dimensional determinan los posibles valores de las variables. La tasa de cambio del sistema se define entonces a través de la función del vector de estado y de la señal de entrada y su relación se definiría a través de la ecuación 84 y 85

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \quad (84)$$

$$y(k) = g(x(k), u(k), k) \quad (85)$$

Para sistemas lineales invariantes en el tiempo se utiliza la notación 86 y 87. Su correspondencia en diagrama de estado se puede observar en la figura 22-2.

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (86)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (87)$$

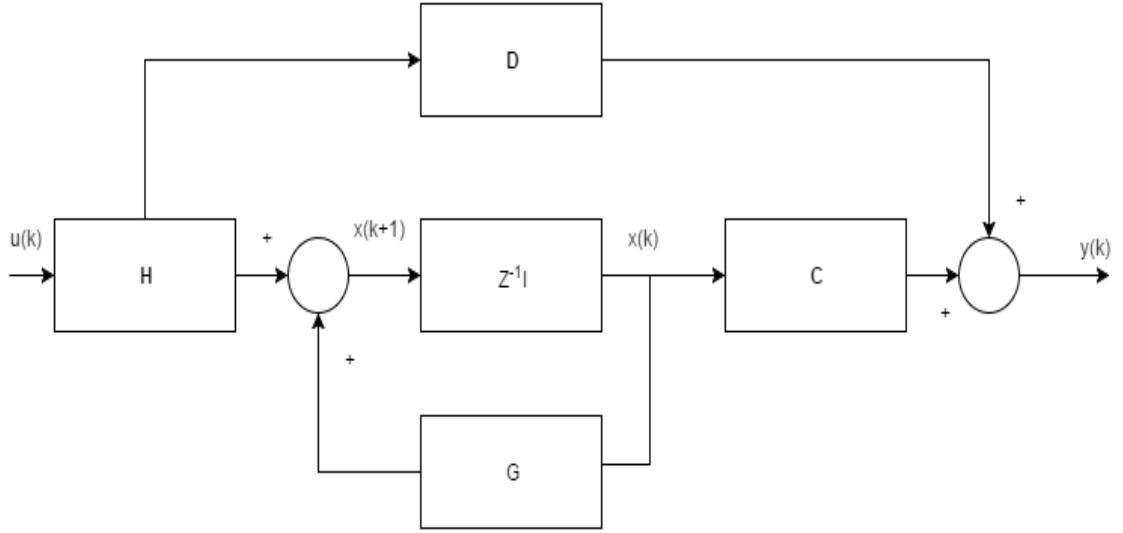


Gráfico 22-2: Diagrama de Espacio de Estados en un sistema LTI

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

2.7.4 Representación en Diagramas de Estado

Se representa un sistema discreto mediante la ecuación 88.

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \quad (88)$$

También se puede representar de la forma:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \dots b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \dots a_n z^{-n}} \quad (89)$$

$$G(z) = b_0 U(z) + \frac{(b_1 - a_1 b_0) z^{-1} + (b_2 - a_2 b_0 z^{-2}) \dots (b_n - a_n b_0) z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \dots a_n z^{-n}} U(z) \quad (90)$$

Si:

$$\tilde{Y} = \frac{(b_1 - a_1 b_0) z^{-1} + (b_2 - a_2 b_0 z^{-2}) \dots (b_n - a_n b_0) z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \dots a_n z^{-n}} \quad (91)$$

Se puede representar de la siguiente manera:

$$Y_z = b_0 U(z) + \tilde{Y} U(z) \quad (92)$$

$$Q(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \dots a_n z^{-n} \quad (93)$$

$$[H]Q(z) = \frac{\tilde{Y}}{(b_1 - a_1 b_0)z^{-1} + (b_2 - a_2 b_0 z^{-2}) \dots (b_n - a_n b_0)z^{-n}} \quad (94)$$

La representación en variables de estado queda de la forma:

$$\begin{aligned} x_1(z) &= z^{-n} Q(z) \\ x_2(z) &= z^{-n-1} Q(z) \\ x_3(z) &= z^{-n-2} Q(z) \\ x_n(z) &= z^{-1} Q(z) \end{aligned} \quad (95)$$

Aplicando la transformada Z de la forma:

$$x(n) \rightarrow X(z) \quad (96)$$

Por lo tanto el objetivo será transformar una señal en el tiempo discreto $x(n)$ en una función polinómica de variable compleja.

$$x_n = \{..., x(-1), x(0), x(1), x(2)...\} \quad (97)$$

Para realizar la transformación no se necesita ningún cálculo, se debe tomar en cuenta que si almacenan la señal se almacenan con los mismos valores así se simplifica el tratamiento de sistemas LTI.

$$\begin{aligned} zx_1(z) &= x_2(z) \\ zx_2(z) &= x_3(z) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ zx_{n-1}(z) &= x_n(z) \end{aligned} \quad (98)$$

Estas ecuaciones equivalen a:

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= x_2(k) \\
x_2(k+1) &= x_3(k) \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
x_{n-1}(k+1) &= x_n(k)
\end{aligned} \tag{99}$$

Por lo tanto podemos representar los espacios de estado de un sistema LTI mediante las ecuaciones 100 y 101

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} U(z) \tag{100}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \dots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 U(k) \tag{101}$$

2.7.5 Resolución de las Ecuaciones de Espacio de Estados

El objetivo de resolver las ecuaciones de espacio de estado es encontrar el valor del vector de estado para un determinado instante $k \geq 0$ a partir de un valor $x(0)$.

Basado en la transformada Z

Si se parte de las ecuaciones de estado establecidas de la forma:

$$\begin{aligned}
x_{(k+1)} &= Gx(k) + HU(k) \\
y(k) &= Cx(k) + DU(k)
\end{aligned} \tag{102}$$

Aplicando la transformada Z:

$$\begin{aligned} zX(z) - zx(0) &= GX(z) + HU(z) \\ (zI - G)X(z) &= zx(0) + HU(z) \\ X(z) &= zx(0)(zI - G)^{-1} + H(zI - G)^{-1}U(z) \end{aligned} \quad (103)$$

G y H dependen del mismo tiempo de muestro T, para determinar su valor se usa la solución de la ecuación de estado en tiempo continuo:

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} BU(\tau) d\tau \quad (104)$$

La entrada u(t) es muestreada por un holder de orden 0 por lo cual se cumple:

$$\begin{aligned} u(t) &= u(kT) \\ kT &\leq t \leq kT + T \end{aligned} \quad (105)$$

Por lo tanto reemplazando en la ecuación 104 se tiene:

$$x((k+1)T) = e^{A(k+1)T}x(0) + e^{A(k+1)T} \int_0^{(k+1)T} e^{-A\tau} BU(\tau) d\tau \quad (106)$$

y

$$x(kT) = e^{AkT}x(0) + e^{AkT} \int_0^{kT} e^{-A\tau} BU(\tau) d\tau \quad (107)$$

Reemplazando la ecuación 107 en 106 se obtiene:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + e^{A(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau} BU(\tau) d\tau \quad (108)$$

Bajo la premisa que u(t) es costante en el intervalo de integración se puede sustituir $u(\tau)$ por $u(k\tau)$ y se obtiene:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau} BU(k\tau) d\tau \quad (109)$$

Con esto se define la ecuación de estado continuo discretizado:

$$x((k+1)T) = G(T)x(kT) + H(T)U(kT) \quad (110)$$

y la ecuación de salida se define por:

$$y(kT) = Cx(kT) + DU(kT) \quad (111)$$

Para determinar el valor de e^{AT} se usa la transformada inversa de Laplace:

$$e^{AT} = \mathcal{L} \left\{ sI - A^{-1} \right\} \quad (112)$$

CAPITULO III

3 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Tomando como punto de partida el marco conceptual detallado en el capítulo 2 el cual se enfoca en tratar teorías fundamentales de controladores enteros y no enteros, sus métodos de aproximación numérica para desarrollar criterios de selección y aplicabilidad, se procede al diseño de la metodología que se utilizará para el desarrollo y evaluación de los controladores.

La metodología a seguir es del tipo experimental e inicia detallando el proceso de optimización el cual se utiliza en el resto de procesos de la investigación para luego continuar con el diseño del controlador entero y del controlador no entero, en cada uno de estos procesos se obtendrán los parámetros resultantes.

3.1 Optimización de Parámetros

El objetivo es optimizar los parámetros resultantes mediante el método de gradiente decreciente detallado en 2.6.1 en base a un factor de aprendizaje que se le denominará J , este se ejecutará cuantas veces sea necesario hasta que el algoritmo no pueda obtener un mejor resultado de los parámetros introducidos. La ecuación que describe el método se basa en una función de costo integral del error absoluto y se describe en la ecuación 113

$$J = a \int |e| dt + b \int z^2 dt + c \int |\dot{e}| dt \quad (113)$$

Su programación se basa en el diagrama de flujo de la figura 1-3

En base a la ecuación 113 se establece las siguientes consideraciones:

1. a, b, c constantes de ponderación.
2. $|e|$ valor absoluto del error.
3. z función que indica la factibilidad del controlador.
4. $|\dot{e}|$ valor absoluto de la tasa de cambio del error.

Para definir z se aplica la curva de transferencia, dando un peso muy elevado a la ponderación b con respecto a los otros funciones de costo a, c . El valor que tomen estos parámetros dependerá del criterio del diseñador del control y de la planta a la cual se va a implementar.

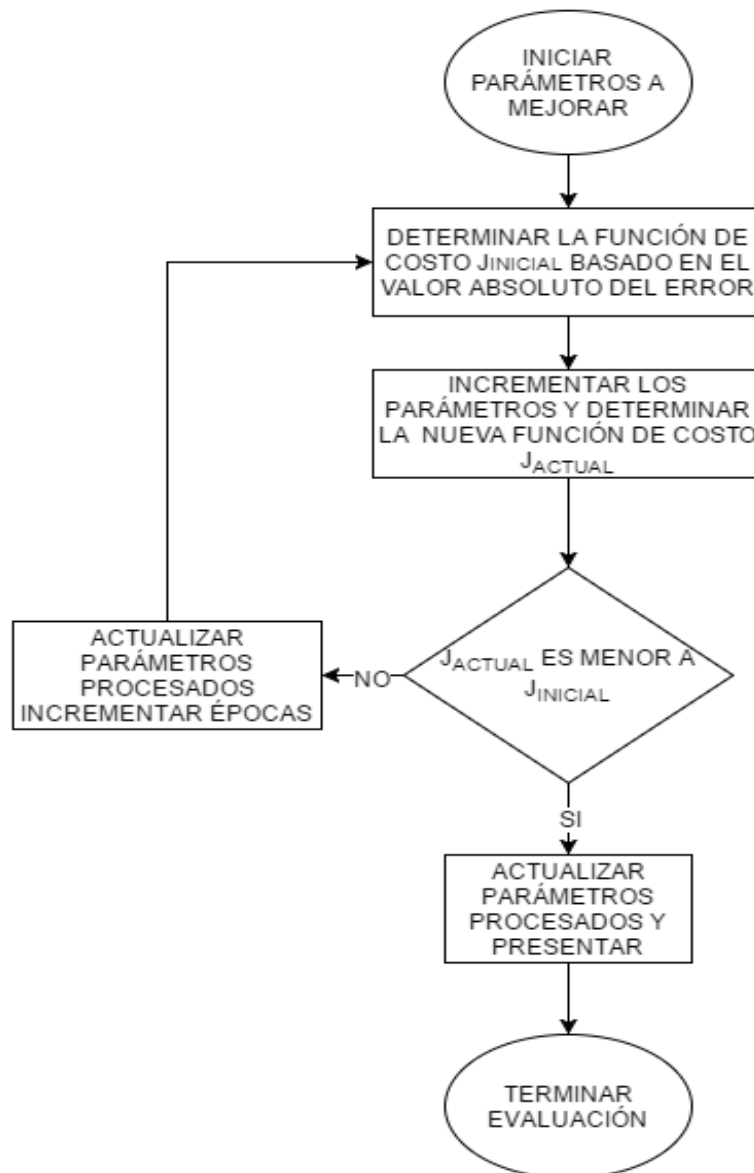


Gráfico 1-3: Diagrama de flujo del cálculo de la función de costo

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

3.2 Modelo Experimental de la Planta

Con el objetivo de que la metodología para el desarrollo de controladores no enteros pueda ser usado en plantas físicas reales se utiliza el modelo matemático de una planta experimental de National Instruments. Se debe discretizar el sistema para evaluar la función de costo para se plantea las ecuaciones de manera vectorial.

Se establece de manera vectorial las ecuaciones:

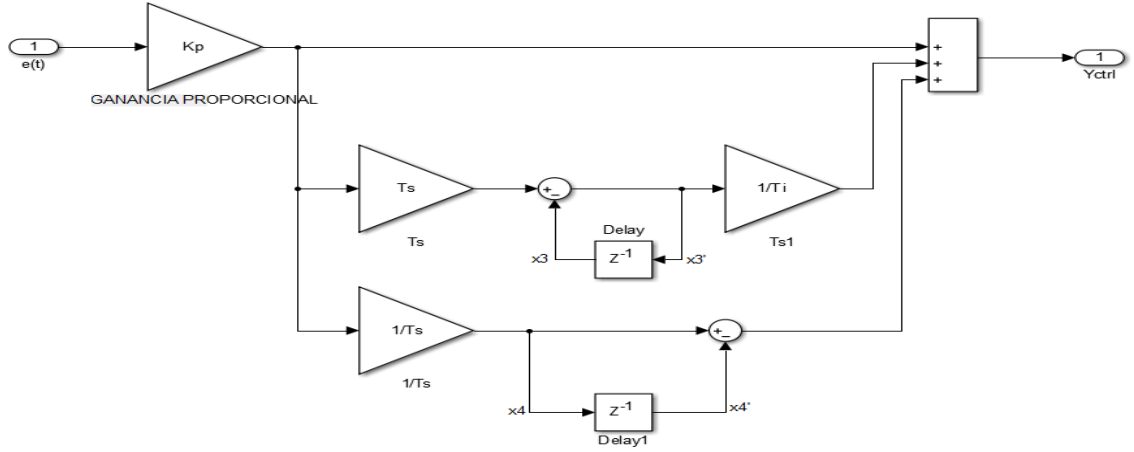


Gráfico 2-3: Esquema del Sistema Identificado con Control Discretizado

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

$$\begin{bmatrix} \sum \hat{X}_1^2 & -\sum \hat{X}_2 \hat{X}_1 & -\sum \hat{X}_3 \hat{X}_1 \\ -\sum \hat{X}_1 \hat{X}_2 & \sum \hat{X}_2^2 & -\sum \hat{X}_3 \hat{X}_2 \\ -\sum \hat{X}_1 \hat{X}_3 & \sum \hat{X}_2 \hat{X}_3 & \sum \hat{X}_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \hat{Y} \hat{X}_1 \\ -\sum \hat{Y} \hat{X}_2 \\ -\sum \hat{Y} \hat{X}_3 \end{bmatrix} \quad (114)$$

Despejando θ_i

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \hat{X}_1^2 & -\sum \hat{X}_2 \hat{X}_1 & -\sum \hat{X}_3 \hat{X}_1 \\ -\sum \hat{X}_1 \hat{X}_2 & \sum \hat{X}_2^2 & -\sum \hat{X}_3 \hat{X}_2 \\ -\sum \hat{X}_1 \hat{X}_3 & \sum \hat{X}_2 \hat{X}_3 & \sum \hat{X}_3^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum \hat{Y} \hat{X}_1 \\ -\sum \hat{Y} \hat{X}_2 \\ -\sum \hat{Y} \hat{X}_3 \end{bmatrix} \quad (115)$$

La relación presentada en 115 se basa en la teoría de Gauss denominada minimización del error cuadrático, se necesita una señal $U(s)$ con una alta riqueza frecuencial debido a que las no linealidades y la existencia de perturbaciones no consideradas puedan ser representadas e identificadas por el modelo final. Se debe aplicar un procesamiento adicional con filtros con el objetivo de reducir el ruido presente que se generó en la señal.

3.3 Diseño del Control Entero

3.3.1 Método de Ziegler and Nichols

El objetivo es obtener un controlador clásico sintonizado mediante el primer método de Ziegler & Nichols denominado respuesta al escalón el cual consiste en caracterizar su respuesta temporal en lazo abierto, este se debe comportar como un sistema de segundo orden,

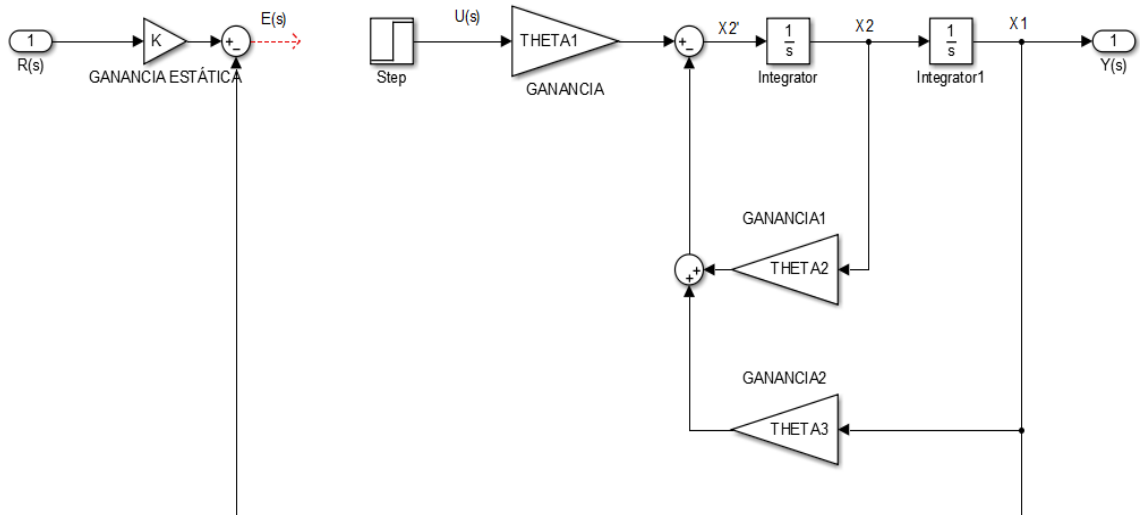


Gráfico 3-3: Esquema de la respuesta al escalón del Sistema Identificado

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

luego de aplicar este procedimiento se ejecuta el método de gradiente decreciente para optimizar los parámetros. Se inicia definiendo los parámetros necesarios para desarrollar un controlador clásico del tipo PID los cuales son:

1. K_p Ganancia Proporcional.
2. T_i Tiempo Integral
3. T_d Tiempo Derivativo

Donde los valores depende de la geometría de la curva de reacción así:

1. $K_p = \frac{1.2}{a}$
2. $T_I = 2 * L$
3. $T_D = \frac{L}{2}$

El procedimiento de sintonización es útil en sistemas estables en lazo abierto y que presenten tiempo de retardo. El proceso consiste en retirar el controlador y reemplazarlo por una señal del tipo STEP o escalón. *ver figura 3-3*

En base al diagrama de flujo de la figura 4-3 se establecen las relaciones de cada una de las variables de estado generadas por lo cual se establecen los estados:

$$X_1' = X_2 \quad (116)$$

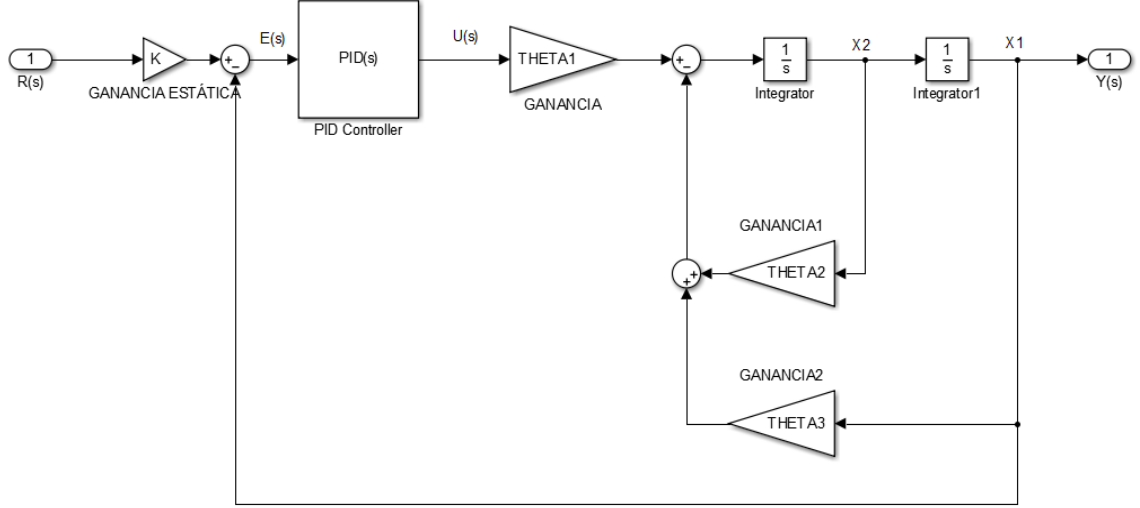


Gráfico 4-3: Diagrama de bloques de la planta y el Control PID

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

$$X_2' = Y_{ctrl}\theta_1 - \theta_2 X_2 - \theta_3 X_1 \quad (117)$$

$$E = UK - X_1 \quad (118)$$

$$Y = X_1 \quad (119)$$

$$X_3' = X_3 + T_s K_p [UK - X_1] \quad (120)$$

$$X_4' = \frac{1}{T_s} K_p [UK - X_1] \quad (121)$$

$$Y_{ctrl} = K_p [UK - X_1] + \frac{1}{T_1} [T_s K_p [UK - X_1] + X_3] + T_D K_p [UK - X_1] - X_4 \quad (122)$$

$$X_3 = X_3' \quad (123)$$

$$X_4 = X_4' \quad (124)$$

$$X_1 = X_1 + T_s X_1' \quad (125)$$

$$X_2 = X_2 + T_s X_2' \quad (126)$$

Una vez determinados los estados se procede a la obtención de los parámetros K_p , T_i y T_d para luego optimizarlos con el método de la Función de Costo **J**.

3.4 Diseño del Control No Entero

Como en el control clásico un control no entero está representado también por una función de transferencia utilizando el plano s o utilizando las aproximaciones discretas z . Para su aproximación se utilizan los métodos numéricos antes descritos *ver 2.5* como Euler, Tustin o Simpson. Se pretende utilizar la aproximación de Tustin tomando en cuenta que la función de transferencia no es racional y en el dominio z el orden es infinito. Al momento de procesar la información con Matlab se debe tener en cuenta que se basa en una integral de convolución y se debe incorporar un retenedor de orden cero. En esta sección se utiliza un método denominado directo que es la aplicación de series de potencia mediante el operador de Euler que representa la derivada e integral fractal, también se hace uso de la aproximación de Tustin y la teoría de Control Clásico, todo esto basado en el diagrama de flujo de la figura 5-3

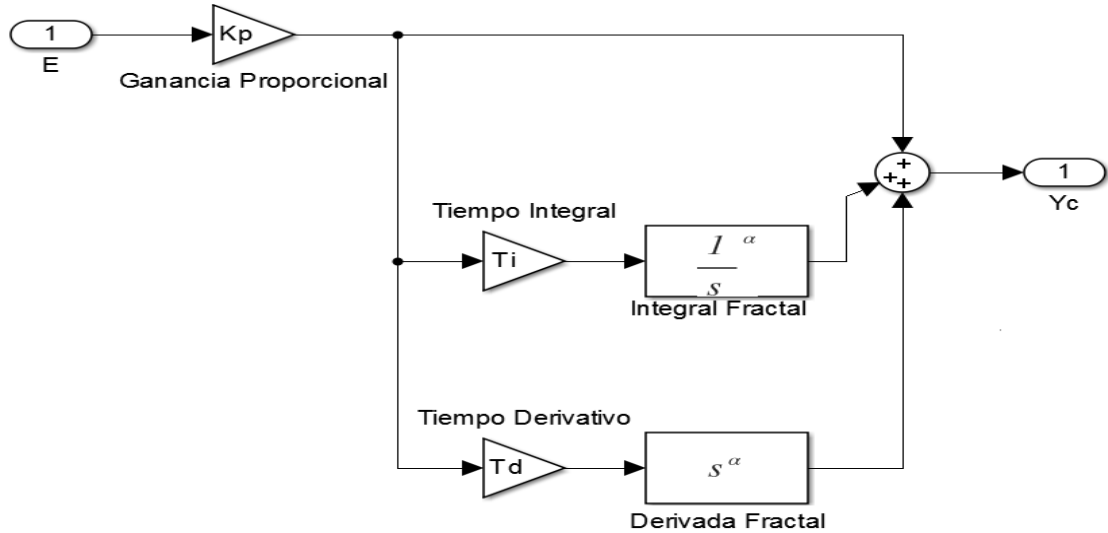


Gráfico 5-3: Diagrama de un Control PID No Entero

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

3.4.1 FOPID Usando Aproximación Fractal

Se establece el término de muestreo T_s y la variable p para representar al operador z^{-1} . La diferencia entre un FOPID y un PID clásico es que la parte integra y derivada se fundamentan en un cálculo fraccionario. Por lo tanto su análisis se fundamenta en desarrollar la parte integral y derivativa en base a aproximaciones numéricas.

3.4.2 Derivador Fractal

Se define la etapa derivativa del control clásico mediante la ecuación 127

$$\frac{1 - z^{-1}}{T_s} \quad (127)$$

Para que el software matemático permita realizar la aproximación usando el método de Tustin 2.5.3, y no reconozca como variable el término z^{-1} se lo reemplazará mediante la variable p resultando en la siguiente ecuación el término derivativo:

$$\frac{1 - p}{T_s} \quad (128)$$

Por lo tanto se establece la ecuación del término derivativo fractal según EULER de la siguiente manera:

$$\left(\frac{1 - p}{T_s}\right)^{\alpha_D} \quad (129)$$

Aparece el término α_D el cual representa el orden fractal del término derivativo por lo cual se define:

$$\alpha_D \in \mathbb{R}^+ \quad (130)$$

Aplicando la aproximación numérica usando la expansión de Taylor para el término derivativo fractal usando *Derive* con cinco términos y centrado en cero se re define el término matemático en la ecuación 131.

$$(\dot{y})^\alpha = \frac{A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{z^5} \quad (131)$$

Se procede a expandir el numerador para exportar la expresión hacia Matlab en el cual se manipula su términos para facilitar sus cálculos y generar la función de transferencia el mismo procedimiento se sigue en el denominador. Su manipulación y tratamiento se resume en la figura 6-3

3.4.3 Integrador No Entero

Basándose en aproximaciones de funciones y conceptos matemáticos clásicos que definen la integral de una función $f(t)$ como:

$$\int_0^t f(t) \quad (132)$$

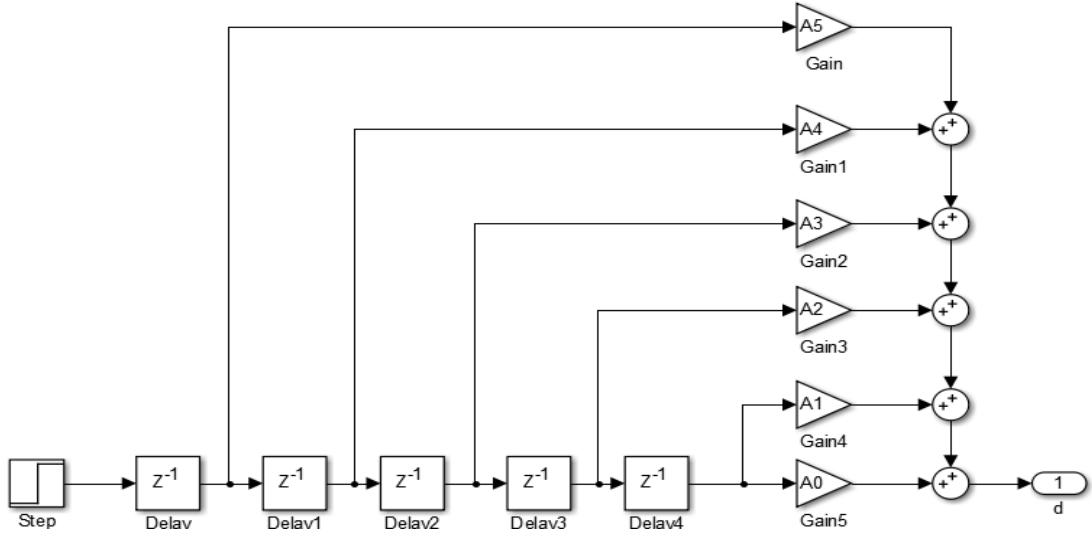


Gráfico 6-3: Diagrama del Derivador Fractal

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

En la cual se considera la condición inicial cero y sus respectivos equivalentes en *Laplace* 133 y *Z* 134 están definidas por la ecuación

$$\frac{F(s)}{s} \quad (133)$$

$$F(z) \left[\frac{T_2}{2} \frac{z+1}{z-1} \right] \quad (134)$$

La ecuación 134 es la función $f(t)$ discretizada e integrada empleando el método de Tustin. La integral como operador expresada en z , se debe considerar la representación de muestras en atrasos puros para definir los filtros digitales se obtiene la ecuación:

$$\left[\frac{T_2}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right] \quad (135)$$

La integral fractal es representada en el dominio de Laplace y se obtiene de manera aproximada en el dominio z obteniendo el operador fractal de la siguiente manera:

$$\frac{1}{s^\alpha} \quad (136)$$

$$\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right)^\alpha \quad (137)$$

Así como en la derivada se toma en cuenta que la expresión z^{-1} no es una operación matemática si no un retraso en el tiempo podríamos representar mediante un cambio de variable y la expresión sería:

$$\left(\frac{T_2}{2} \right)^\alpha \left(\frac{1+p}{1-p} \right)^\alpha \quad (138)$$

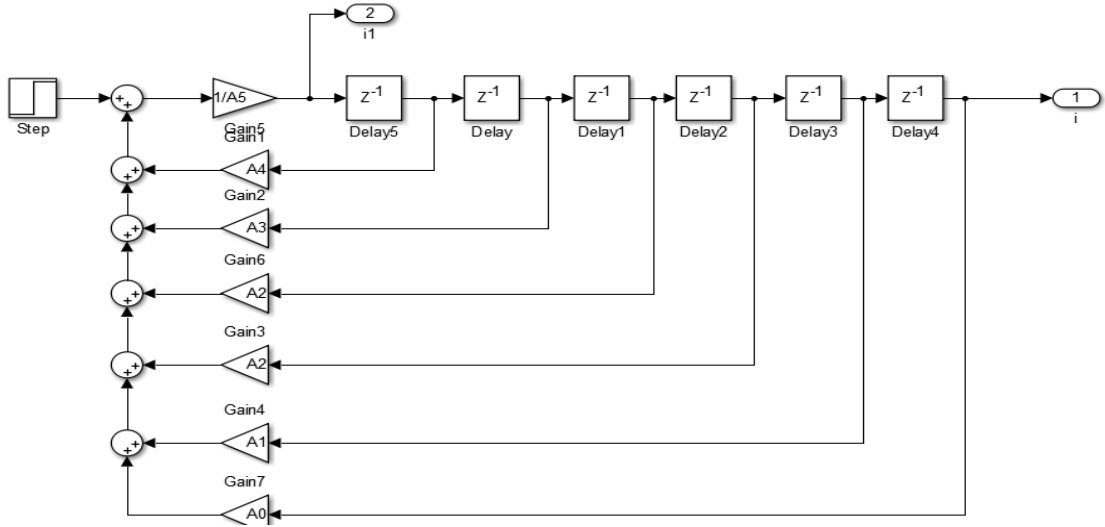


Gráfico 7-3: Diagrama del Integrador Fractal

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

Mediante el software *Derive* se puede desarrollar la parte dinámica usando la aproximación de *Tustin* se obtiene una aproximación dinámica de la manera:

$$\left(\frac{T_s}{2}\right)^\alpha \left(\frac{1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{p^i}{i!} \prod_{j=1}^i (\alpha + 1 - j) \right)}{1 + \sum_{i=1}^n \left((-1)^i \frac{p^i}{i!} \prod_{j=1}^i (\alpha + 1 - j) \right)} \right) \quad (139)$$

A su vez se puede plantear a p como el operador z^{-1} como se hizo en el denominador.

$$\left(\frac{T_s}{2}\right)^\alpha \left(\frac{1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{z^{-i}}{i!} \prod_{j=1}^i (\alpha + 1 - j) \right)}{1 + \sum_{i=1}^n \left((-1)^i \frac{z^{-i}}{i!} \prod_{j=1}^i (\alpha + 1 - j) \right)} \right) \quad (140)$$

$$I^\alpha f(t) = \frac{z^5}{A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0} \quad (141)$$

$$E = U - x_{11} \quad (142)$$

$$E_1 = E * K_p \quad (143)$$

$$\bar{x}_1 = x_2 \quad (144)$$

$$\bar{x}_2 = x_3 \quad (145)$$

$$\bar{x}_3 = x_4 \quad (146)$$

$$\bar{x}_4 = x_5 \quad (147)$$

$$\bar{x}_5 = \frac{E_1}{T_1} - (DI_4x_5 + DI_3x_4 + dI_2x_3 + DI_1x_2 + DI_0x_1) \quad (148)$$

$$Y_{CI} = \bar{x}_5NI_5 \quad (149)$$

$$\bar{x}_6 = x_7 \quad (150)$$

$$\bar{x}_7 = x_8 \quad (151)$$

$$\bar{x}_8 = x_9 \quad (152)$$

$$\bar{x}_9 = x_{10} \quad (153)$$

$$\bar{x}_{10} = \frac{E_1}{DD_5}T_D \quad (154)$$

$$Y_{CD} = \bar{x}_{10}ND_5 + x_{10}ND_4 + x_9ND_3 + x_8ND_2 + x_7ND_1 + x_6ND_0 \quad (155)$$

$$Y_C = Y_{CI} + Y_{CD} + E_1 \quad (156)$$

$$x_{12}^\bullet = Y_CQ_1 + \theta_2x_{12} - \theta_3x_{11} \quad (157)$$

$$x_{11}^\bullet = x_{12} \quad (158)$$

$$Y = x_{11} \quad (159)$$

3.4.4 FOPID Usando Espacio de Estados

El esquema del control FOPID en conjunto con la planta se establece como se muestra en la figura 8-3

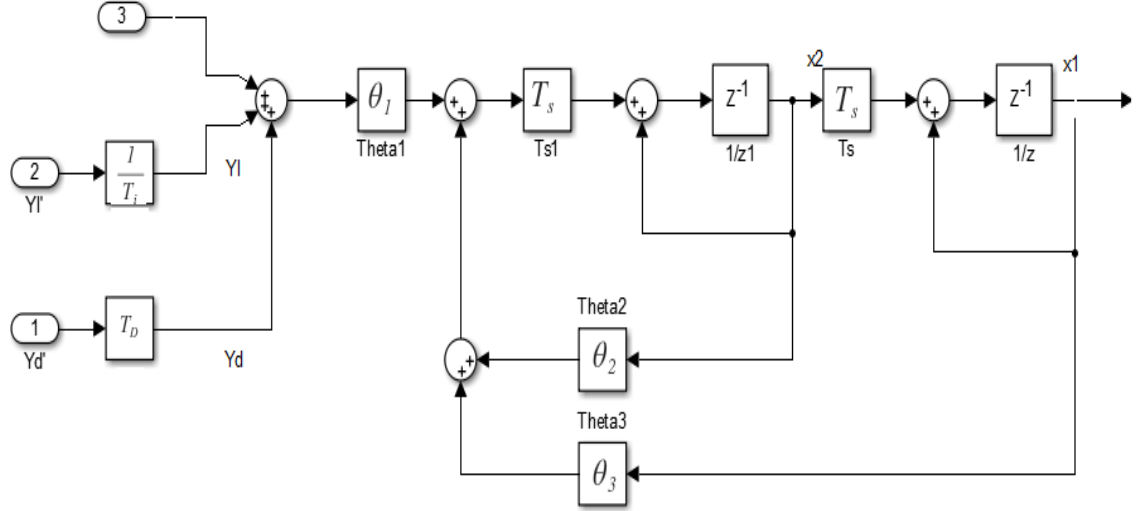


Gráfico 8-3: Diagrama General del Control No Entero

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

$$E_1 = U - Kx_1 \quad (160)$$

$$E_2 = K_p E_1 \quad (161)$$

$$\bar{x}_1 = x_1 + T_s x_2 \quad (162)$$

$$\bar{x}_2 = x_2 + T_s \left(\theta_1 \left(E_2 + \frac{Y_I}{T_I} + \frac{Y_D}{T_D} \right) - \theta_2 x_2 - \theta_3 x_1 \right) \quad (163)$$

$$\bar{x}_3 = x_4 \quad (164)$$

$$\bar{x}_4 = x_5 \quad (165)$$

$$\bar{x}_5 = x_6 \quad (166)$$

$$\bar{x}_6 = x_7 \quad (167)$$

$$\bar{x}_7 = \frac{1}{A_5}(E_2 - A_4x_7 - A_3x_6 - A_2x_5 - A_1x_4 - A_0x_3) \quad (168)$$

$$\bar{x}_8 = x_9 \quad (169)$$

$$\bar{x}_9 = x_{10} \quad (170)$$

$$\bar{x}_{10} = x_{11} \quad (171)$$

$$\bar{x}_{11} = x_{12} \quad (172)$$

$$\bar{x}_{12} = E_2 \quad (173)$$

$$Y_c = E_2 + \frac{\bar{x}_7}{T_i} + T_D \left[A_0x_8 + A_1x_9 + A_2x_{10} + A_3x_{11} + A_4x_{12} + A_5\bar{x}_{12} \right] \quad (174)$$

$$Y = x_1 \quad (175)$$

3.4.5 Espacio de Estados

Se establece la función de transferencia fractal de la forma escrita en la ecuación 176

$$G(s^\alpha) = \frac{1}{\tau s^\alpha + 1} \quad (176)$$

La representación en diagramas de la función de transferencia se muestra en la figura 9-3

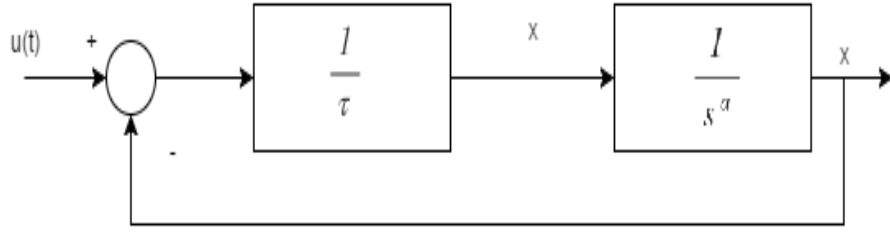


Gráfico 9-3: Diagrama de bloques del comportamiento fractal

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

$$\dot{x} = \frac{1}{\tau}(u - x) \quad (177)$$

$$y = x \quad (178)$$

3.4.6 Predicción de un Estado Fractal

Se establece la ecuación en espacio de estado la cual predice el próximo estado en un sistema fractal de a forma :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} \dot{x}(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} \dot{x}(\tau) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} \dot{x}(\tau) d\tau \quad (179)$$

Simplificando:

$$\Gamma(\alpha) x_{t_{n+1}} = \int_0^{t_n} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} \dot{x}(\tau) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} \dot{x}(\tau) d\tau \quad (180)$$

$$\Psi = \int_0^{t_n} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} \dot{x}(\tau) dt \quad (181)$$

$$\dot{x}_{t_{n+1}} = \frac{1}{\tau}(u_{t_{n+1}} - x_{t_{n+1}}) \quad (182)$$

Por lo tanto se puede observar en la ecuación 183

$$\Gamma(\alpha) x_{t_{n+1}} = \Psi + \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} u(\tau) d\tau + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} x_{t_{n+1}} d\tau \quad (183)$$

Interpretación numérica:

$$\Psi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t + T_s - \tau)^{\alpha-1} \dot{x}(\tau) d\tau \quad (184)$$

$$x_{n+1} = \Psi + x_{n+1} \lim_{\lambda \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \quad (185)$$

$$\lambda = t + T_s - \tau$$

$$x_{n+1} (1 - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{\alpha-1}) = \Psi \quad (186)$$

$$x_{n+1} = \frac{\Psi}{1 - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{\alpha-1}} \quad (187)$$

$$x_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t - \tau)^{\alpha-1} \dot{x}(\tau) d\tau \quad (188)$$

$$x_{n+1} = (1 - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{\alpha-1}) = \Psi \quad (189)$$

$$x_{n+1} = \frac{\Psi}{1 - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{\alpha-1}} \quad (190)$$

$$x_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t - \tau)^{\alpha-1} \dot{x}(\tau) d\tau \quad (191)$$

$$\Psi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n + T_s - \tau)^{\alpha-1} \dot{x}(\tau) d\tau \quad (192)$$

$$x_{t_{n+1}} = \Psi + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_n + T_s - \tau)^{\alpha-1} \dot{x} d\tau \quad (193)$$

$$x_{t_{n+1}} = \Psi + \left[T_s^{\alpha-1} \dot{x}_{t_n} + (\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{\alpha-1}) \dot{x}_{t_{n+1}} \right] \frac{T_s}{2} \quad (194)$$

Si:

$$\dot{x}_{t_{n+1}} = \frac{1}{\tau} (u_{t_{n+1}} - x_{t_{n+1}}) \quad (195)$$

$$x_{t_{n+1}} = \Psi + \frac{T_s^\alpha}{2} \dot{x}_{t_n} + \frac{T_s}{2} (\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{\alpha-1}) \frac{1}{\tau} (u_{t_{n+1}} - x_{t_n}) \quad (196)$$

$$x_{t_{n+1}} = \begin{cases} +\Psi \\ +\frac{T_s^\alpha}{2} \dot{x}_{t_n} \\ +\frac{T_s}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{\alpha-1} \frac{1}{\tau} u_{t_{n+1}} \\ -\frac{T_s}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{\alpha-1} \frac{1}{\lambda} x_{t_{n+1}} \end{cases} \quad (197)$$

$$x_{t_{n+1}} \left[1 + \frac{T_s}{2\tau} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{\alpha-1} \right] = \begin{cases} +\Psi \\ +\frac{T_s^\alpha}{2} x_{t_n} \\ +\frac{T_s}{2\tau} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{\alpha-1} u_{t_{n+1}} \end{cases} \quad (198)$$

$$x_{t_{n+1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{T_s}{2\tau} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{\alpha-1} \right)} * \begin{cases} +\Psi \\ +\frac{T_s^2}{2} \\ +\frac{T_s}{2\tau} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{\alpha-1} u_{t_{n+1}} \end{cases} \quad (199)$$

CAPITULO IV

4 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Modelo de la Planta

Se identifica la planta en lazo abierto para proceder a su evaluación y se obtienen los parámetros necesarios para su función de transferencia:

1. $\theta_1 = 45605,5271$
2. $\theta_2 = 29,8559$
3. $\theta_3 = 192,6994$
4. $K = \frac{\theta_1}{\theta_2} = 236,6667$

Se obtiene la función de transferencia de la planta y se muestra en la figura ecuación 200

$$\frac{4,561e4}{s^2 + 29,86s + 192,7} \quad (200)$$

4.2 Resultado de los Parámetros del Control Entero

Mediante la gráfica y el método de Ziegler and Nichols se definen de manera geométrica los parámetros iniciales:

1. $a=22.4753$
2. $L=0.01953$
3. $K=236.666$
4. $T=0.20568$

Se comprueba mediante la regla empírica que establece $0.1 < L/T < 1$ el valor de los parámetros y el resultado es: 0.094966

Tabla 2: Resultado de Parámetros Sintonizados mediante el primer método de Z-N

CTRL	K_p	T_i	T_d	Resul K_p	Resul T_i	Resul T_d
P	$\frac{T}{L}$	0	0	10.53	0	0
PI	$0,9\frac{T}{L}$	$\frac{0,3}{L}$	0	9.47834101386	15.36	0
PID	$\frac{1,2}{a}$	$2L$	$\frac{L}{2}$	0.053391945825	0.03906	0.009765

Se procede a la obtención de los parámetros de K_d , T_i , T_d mediante el método de entonación de Ziegler and Nichols cuyo resultados se detalla en el cuadro 2

Se obtiene los numeradores y denominadores del control en lazo cerrado en las ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 &0 \\
 &23,7809669622537 \\
 &3144,96194604931 \\
 &139610,056488217 \\
 &2330120,48429324 \\
 &12010869,3713677 \\
 &0
 \end{aligned} \tag{201}$$

$$\begin{aligned}
 &1 \\
 &83,4927669622537 \\
 &4421,73551085931 \\
 &151116,484521137 \\
 &2367253,5430536 \\
 &12010869,3713677 \\
 &0
 \end{aligned} \tag{202}$$

4.2.1 Optimización de los Parámetros del Controlador Entero

Se ingresa los parámetros calculados originalmente con el método de Ziegler and Nichols y se procede a ejecutar el proceso de optimización basado en Gradiente Decreciente, dando como resultado las ecuaciones 203

$$\begin{aligned}
 K_p &= 0,0533917691419679 \\
 T_i &= 0,039065888826738 \\
 T_d &= 0,0097664722066845
 \end{aligned}
 \tag{203}$$

La respuesta gráfica del sistema con controlador entero se presenta en las figura 1-4.

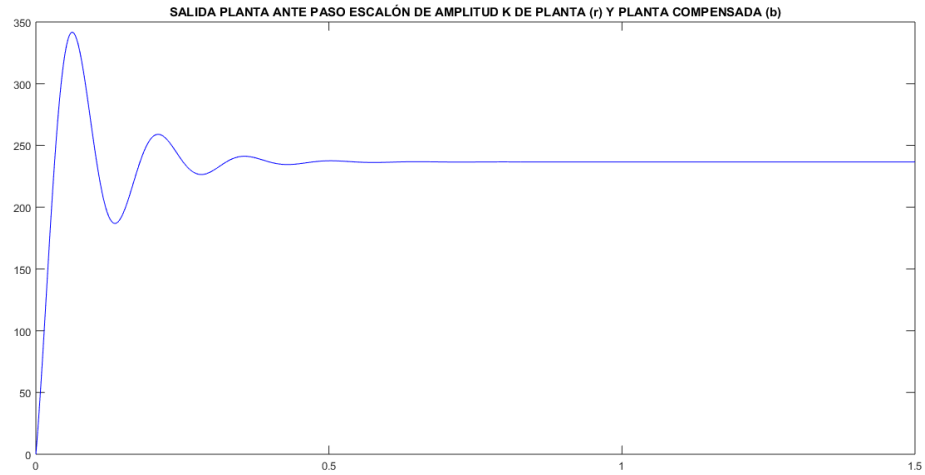


Gráfico 1-4: Respuesta del Control Entero no Optimizado

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

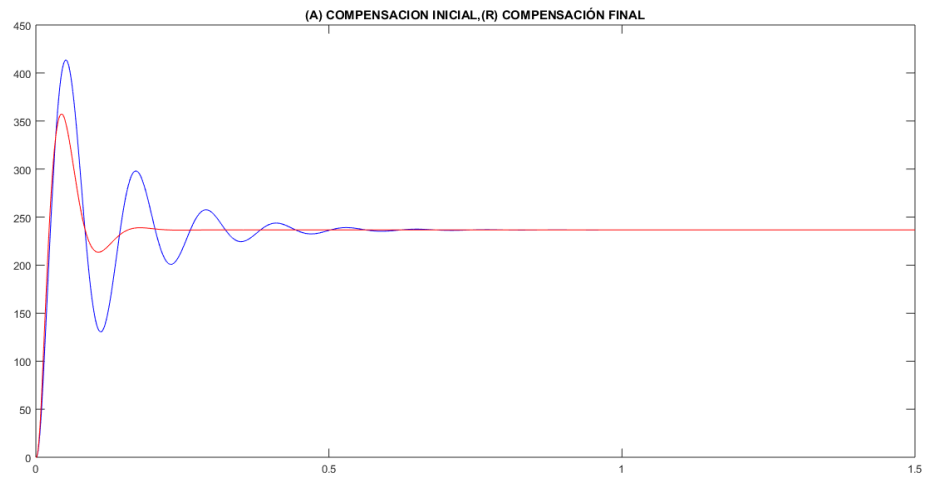


Gráfico 2-4: Control Entero Inicial y Optimizado

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

4.3 Resultado FOPID Usando Aproximaciones Numéricas

Derivada No Entera

Derivada según *Euler* se determinar mediante la ecuación 204

$$\frac{1-p}{T_s} \quad (204)$$

Derivada según *Euler* planteada de manera fractal en la ecuación 205

$$\left(\frac{1-p}{T_s}\right)^\alpha \quad (205)$$

Usando la expansión de *Taylor* aproximando con 5 términos se obtiene la ecuación 206

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{120} \\ \alpha^5 p^5 - \alpha^4 p^4 (2p+1) \\ +5\alpha^3 p^3 (7p^2+6p+4) \\ -5\alpha^2 p^2 (10p^3+11p^2+12p+12) \\ +2\alpha^1 p^1 (12p^4+15p^3 \\ +20p^2+30p^1+60) \left(\frac{1}{T_s}\right)^\alpha \end{array} \right. \quad (206)$$

Reemplazando el operador p por z^{-1} y simplificando la ecuación se obtiene:

$$[H] \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{120z^5} \\ (120\alpha^0 z^5 - 120\alpha^1 z^4 \\ +60\alpha^2 z^3 (\alpha-1) \\ -20\alpha^1 z^2 (\alpha^2-3\alpha+2) \\ +5\alpha z (\alpha^3-6\alpha^2+11\alpha-6) - \alpha(\alpha^4-10\alpha^3+35\alpha^2-50\alpha+24) \left(\frac{1}{T_s}\right)^\alpha \end{array} \right. \quad (207)$$

Se con el objeto de usar las expresiones en Matlab se realizan las siguientes modificaciones:

Separación del Numerador del Denominador. Numerador:

$$\left\{ \begin{array}{l} 120z^5 - 120az^4 \\ +60az^3(a-1) - 20az^3(a^2-3a+2) \\ +5az(a^3-6a^2+11a-6) \\ -a(a^4-10a^3+35a^2-50a+24) \end{array} \right. \quad (208)$$

Denominador:

$$z^5 \quad (209)$$

Factor Común:

$$\frac{\left(\frac{1}{T_s}\right)^\alpha}{120} \quad (210)$$

Procedimiento para generar la función de transferencia:

$$A5 = 120 \quad (211)$$

$$A4 = -120a \quad (212)$$

$$A3 = 60a(a - 1) \quad (213)$$

$$A2 = -20a(a^2 - 3a + 2) \quad (214)$$

$$A1 = +5a(a^3 - 6a^2 + 11a - 6) \quad (215)$$

$$A0 = -a(a^4 - 10a^3 + 35a^2 - 50a + 24) \quad (216)$$

Factor Común:

$$KF = \frac{\left(\frac{1}{T_s}\right)^\alpha}{120} \quad (217)$$

Espacio de Estado Parámetros del Numerador:

$$A5 = A5 * KF \quad (218)$$

$$A4 = A4 * KF \quad (219)$$

$$A3 = A3 * KF \quad (220)$$

$$A2 = A2 * KF \quad (221)$$

$$A1 = A1 * KF \quad (222)$$

$$A0 = A0 * KF \quad (223)$$

Parámetros del denominador:

$$B5 = 1 \quad (224)$$

Integral No Entera

De manera inversa a la Deriva No Entera se inicia con la definición de un integrador en s en la ecuación $\frac{1}{s}$. Se desarrollo la parte integral del controlador no entero basándose en la marco referencial descrito en 3.4.3. Usando Derive para generar la aproximación con centro en cero y Matlab para procesar los coeficientes finales se obtuvo la función de transferencia en lazo cerrado controlador no entero de la ecuación 225.

$$\frac{23,78s^5 + 3145s^4 + 1,396e05s^3 + 2,33e06s^2 + 1,201e07s}{s^6 + 83,49s^5 + 4422s^4 + 1,511e05s^3 + 2,367e06s^2 + 1,201e07s} \quad (225)$$

4.3.1 Control No entero con Aproximación Numérica Optimizados

Los parámetros que se someten al proceso de optimización son los siguientes: K_p , T_i , T_d , α_i , α_d y se realizan siete pruebas diferentes por lo cual se detalla de la siguiente manera:

4.3.2 Prueba 1 de los Controladores

Se procede a ejecutar el programa bajo un número máximo de épocas 400 y los parámetros optimizados se resumen en el Cuadro 3 y su respuesta se observa en las figuras 3-4 4-4 5-4 y 6-4.

Tabla 3: Prueba 1 con 400 épocas

PARÁMETROS	INICIALES	OPTIMIZADOS
K_p	0.00533917691419679	0.0226327645194255
T_i	0.03906588826738	0.0642715981910369
T_d	0.0097664722066845	0.0307417626234634
α_d	0.9	0.902544976966477
α_i	0.8	0.801926447282604

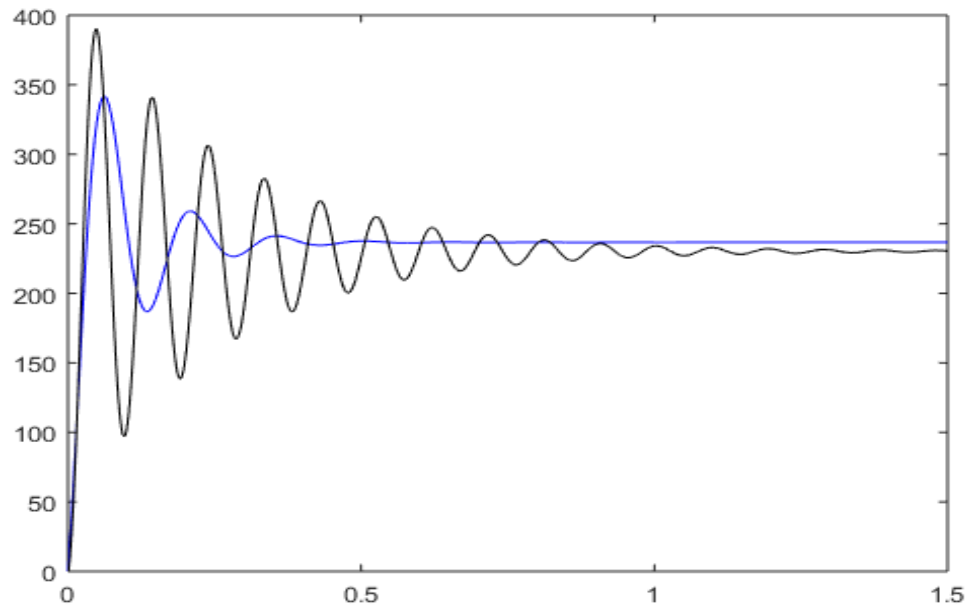


Gráfico 3-4: Respuesta del Control No Entero con Parámetros sin Optimizar.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

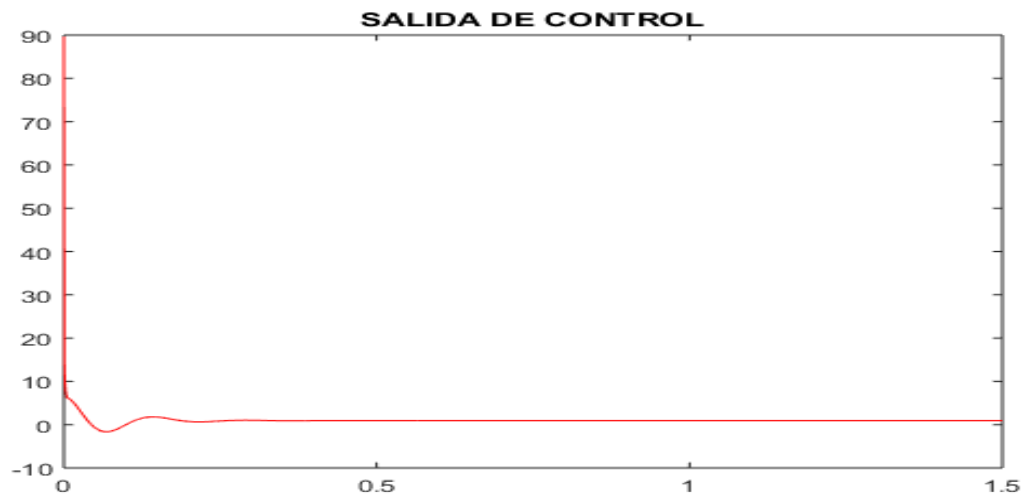


Gráfico 4-4: Prueba 1: Salida del Control

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

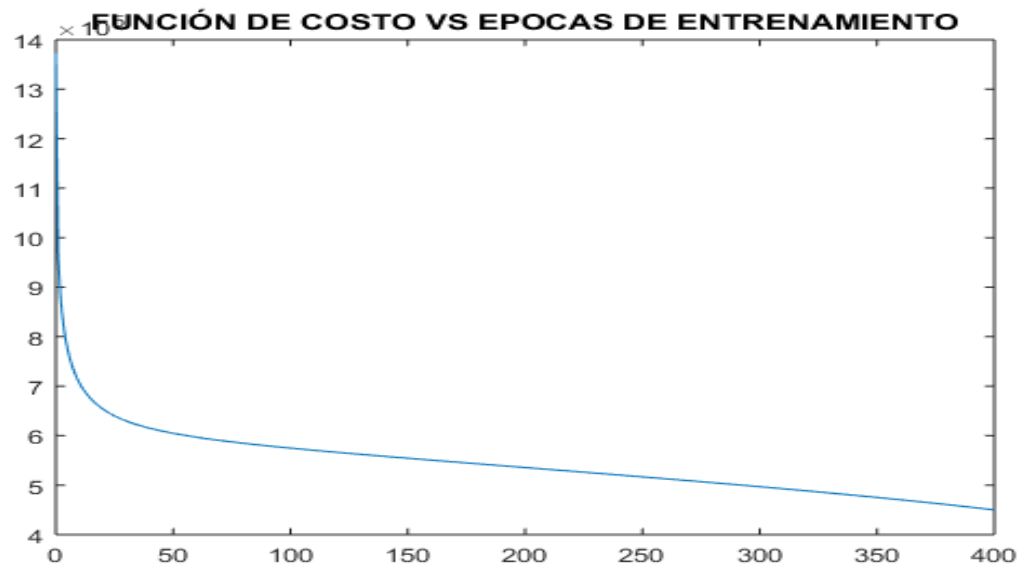


Gráfico 5-4: Prueba 1: Función de Costo vs. Epocas de Entrenamiento.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

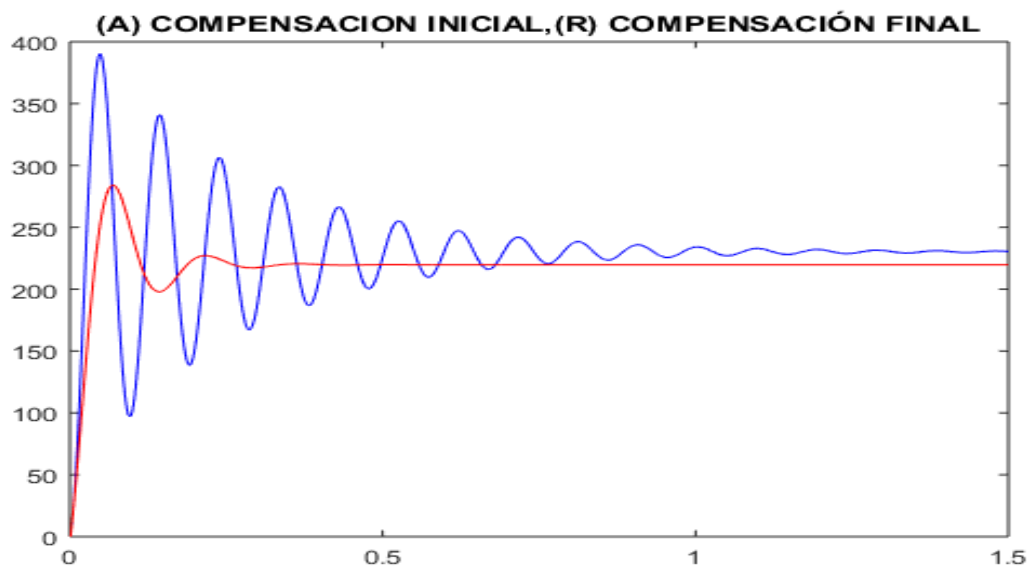


Gráfico 6-4: Prueba 1: Azul compensación inicial, gráfica roja compensación Final.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

4.3.3 Prueba 2 de los Controladores

Se procede a ejecutar el programa bajo un número máximo de épocas 600 y los parámetros optimizados se resumen en el Cuadro 4 y su respuesta se pueden observar en las figuras 7-4 8-4 9-4 y 10-4.

Tabla 4: Prueba 2 con 600 épocas

PARÁMETROS	INICIALES	OPTIMIZADOS
K_p	0.00533917691419679	0.00464241317071932
T_i	0.03906588826738	0.066957514963325
T_d	0.0097664722066845	0.0304240840033204
α_d	0.9	0.90254430844523
α_i	0.8	0.801874027932627

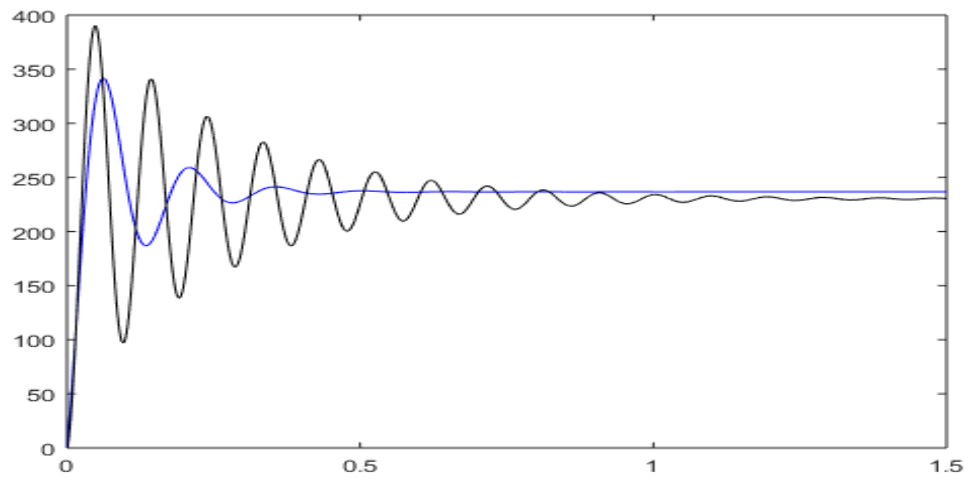


Gráfico 7-4: Prueba 2: Control No Entero con Parametros sin Optimizar.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

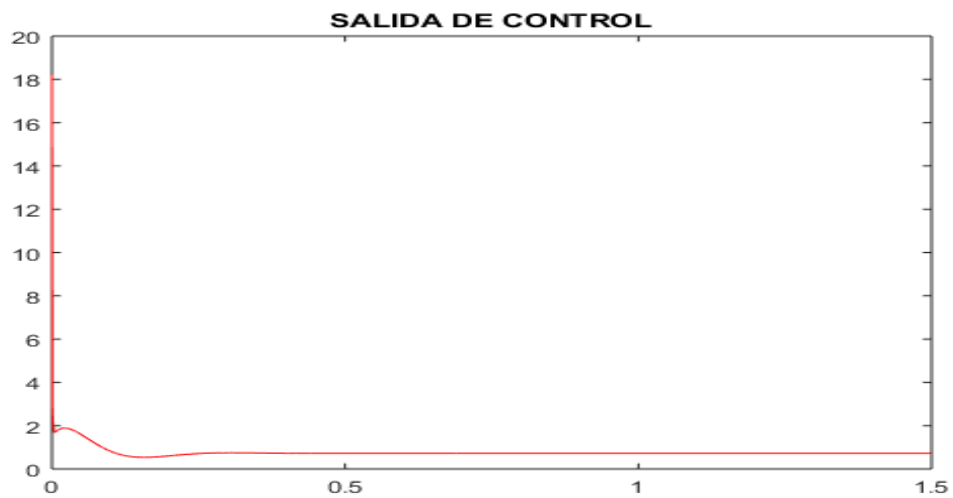


Gráfico 8-4: Prueba 2: Salida del Control.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

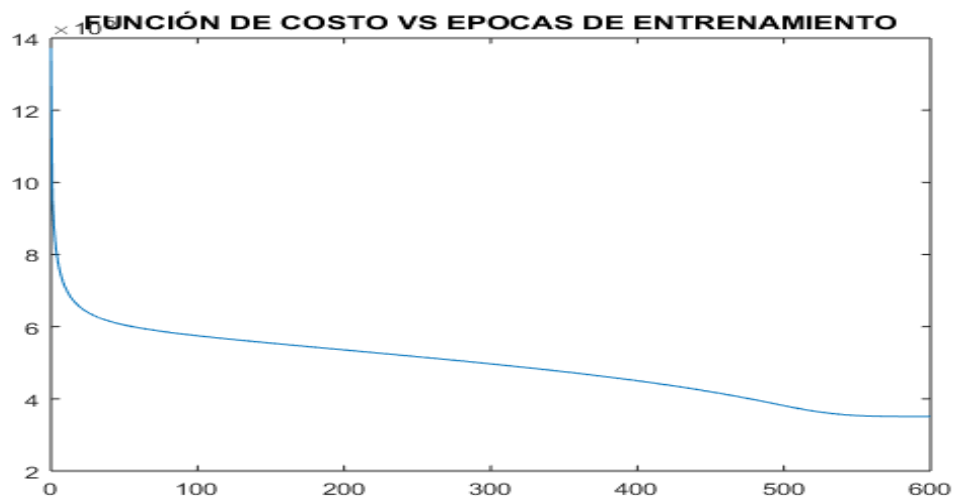


Gráfico 9-4: Prueba 2 Función de Costo vs. Épocas de Entrenamiento.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

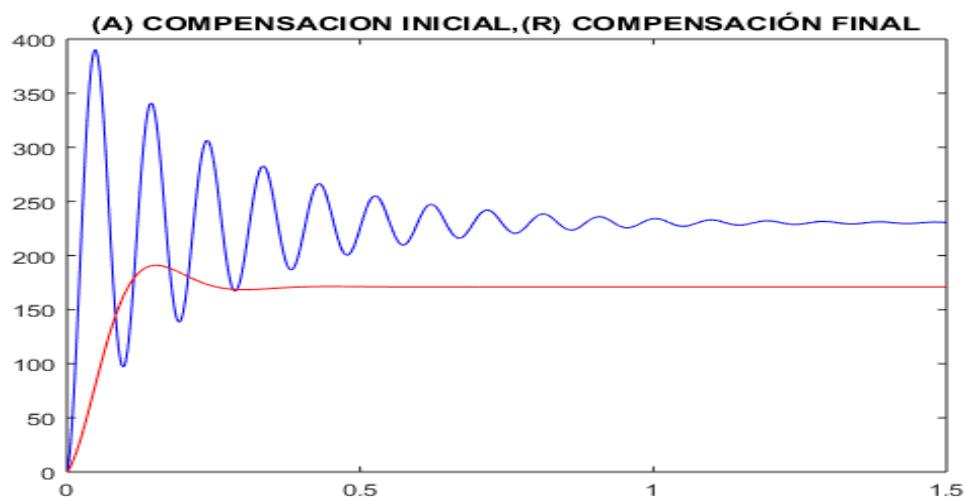


Gráfico 10-4: Azul compensación inicial, gráfica roja compensación Final.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

4.3.4 Prueba 3 de los Controladores

Se procede a ejecutar el programa bajo un número máximo de épocas 600 y los parámetros optimizados se resumen en el Cuadro 5 y la respuesta se puede ver en las figuras 11-4 12-4 13-4 y 14-4.

Tabla 5: Prueba 3 con 600 épocas

PARÁMETROS	INICIALES	OPTIMIZADOS
K_p	0.00533917691419679	0.0533917691419679
T_i	0.03906588826738	0.03906588826738
T_d	0.0097664722066845	0.0097664722066845
α_d	0.2	0.2
α_i	0.2	0.2

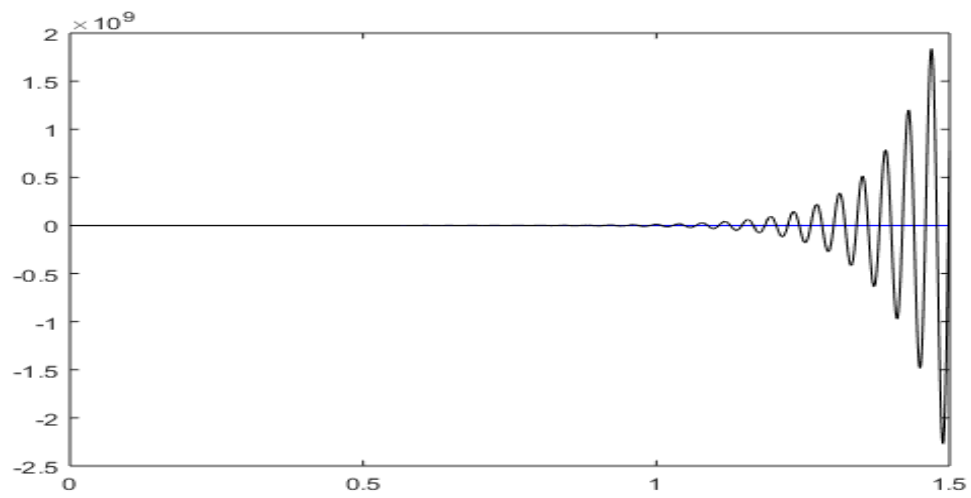


Gráfico 11-4: Prueba 3: Control No Entero con Parametros sin Optimizar.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

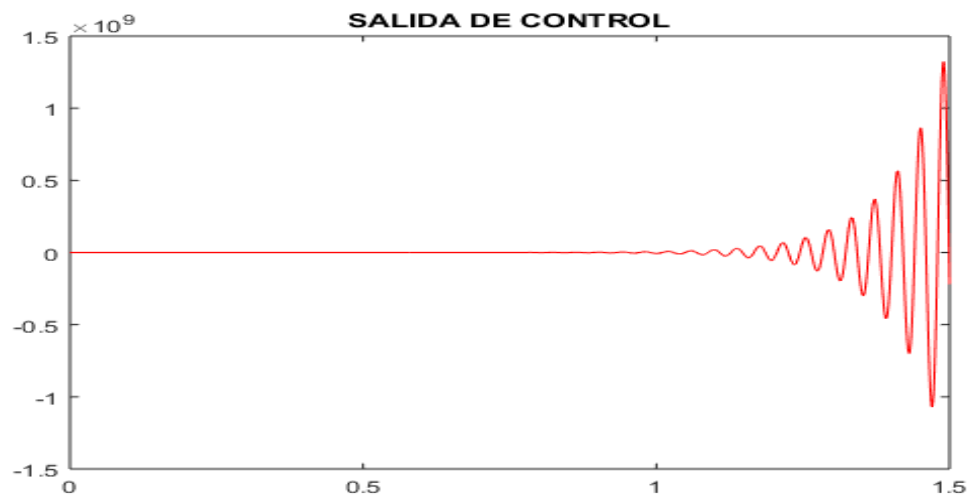


Gráfico 12-4: Prueba 3: Salida del Control.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016



Gráfico 13-4: Prueba 3: Función de Costo vs. Épocas de Entrenamiento.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

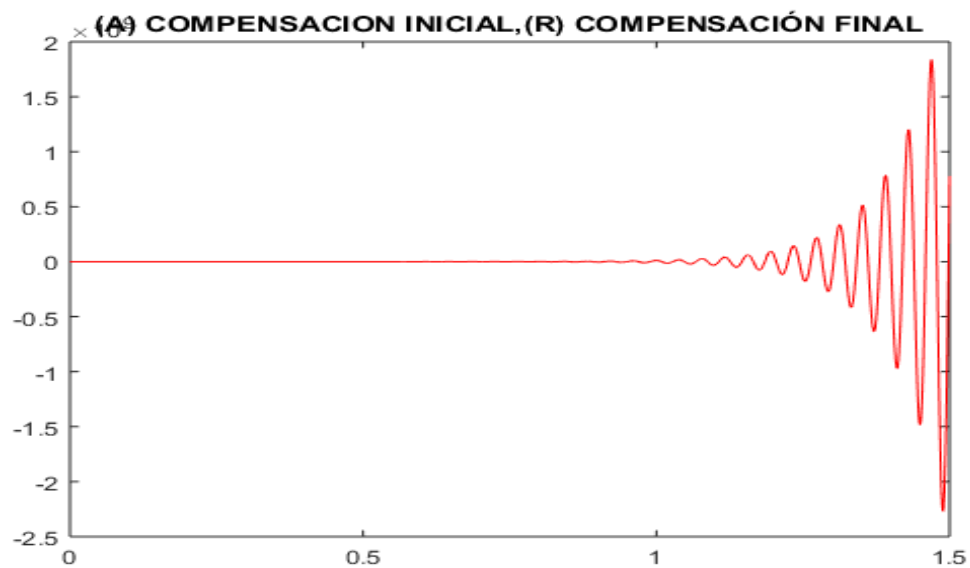


Gráfico 14-4: Prueba 3: Azul compensación inicial, gráfica roja compensación Final.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

4.3.5 Prueba 4 de los Controladores

Se procede a ejecutar el programa bajo un número máximo de épocas 600 y los parámetros optimizados se resumen en el Cuadro 6 y la respuesta se pueden observar en las figuras 15-4 16-4 17-4 y 18-4.

Tabla 6: Prueba 4 con 600 épocas

PARÁMETROS	INICIALES	OPTIMIZADOS
K_p	0.00533917691419679	0.0253296271450606
T_i	0.03906588826738	0.0702504352341817
T_d	0.0097664722066845	0.0132743963551482
α_d	1	0.99689807998113
α_i	1	1.00343522730916

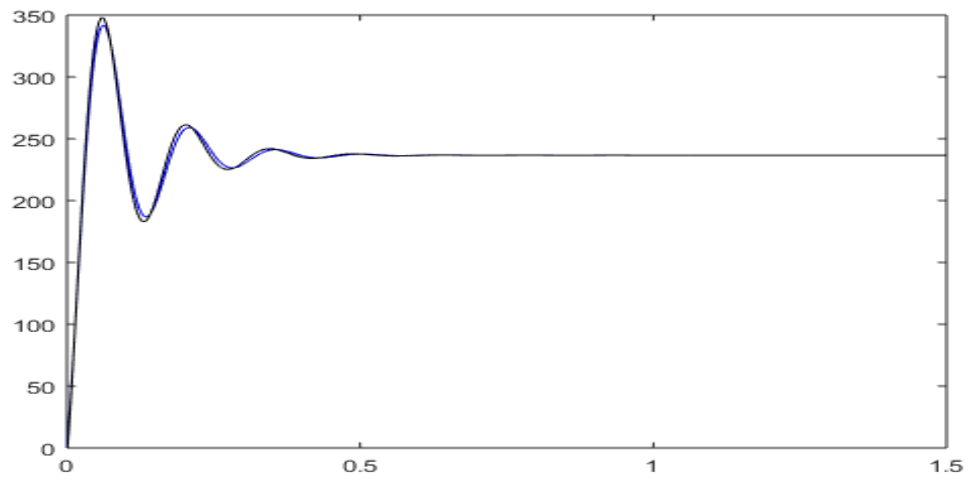


Gráfico 15-4: Prueba 4: Control No Entero con Parámetros sin Optimizar.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

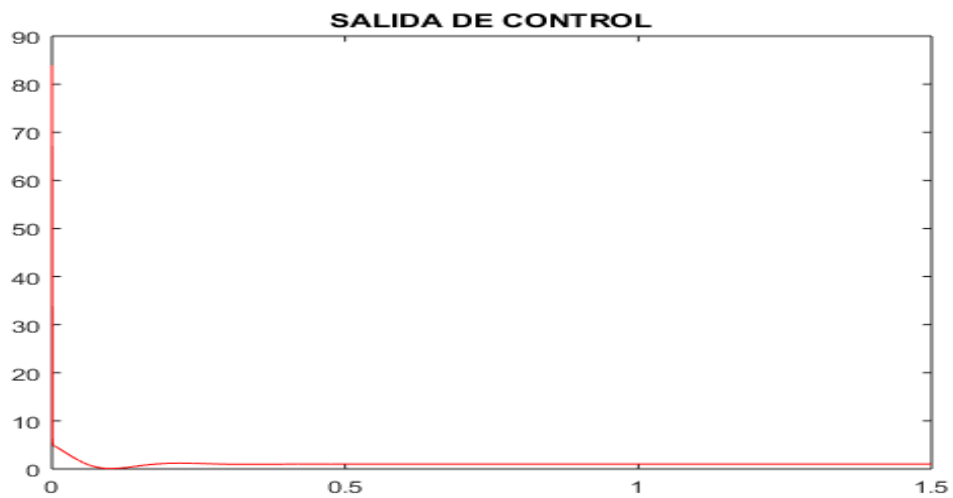


Gráfico 16-4: Prueba 4: Salida del Control

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

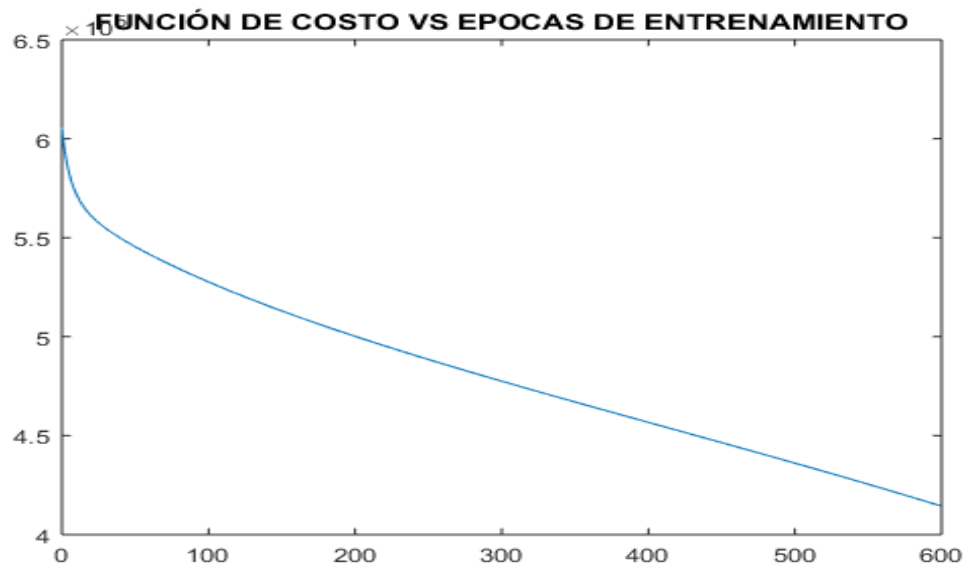


Gráfico 17-4: Prueba 4: Función de Costo vs. Epocas de Entrenamiento.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

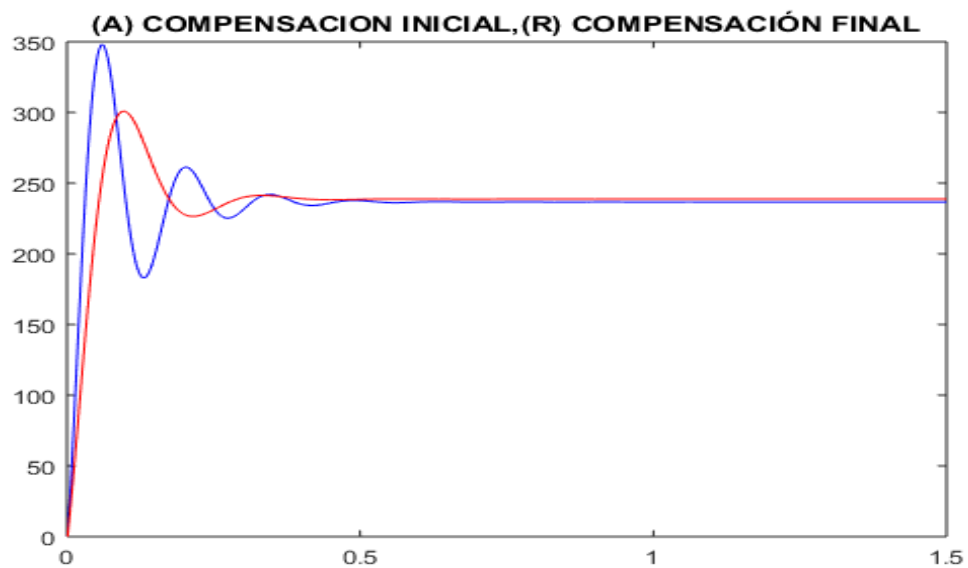


Gráfico 18-4: Prueba 4: Azul compensación inicial, gráfica roja compensación Final.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

4.3.6 Prueba 5 de los Controladores

Se procede a ejecutar el programa bajo un número máximo de épocas 600 y los parámetros optimizados se resumen en el Cuadro 7 y los resultados se observan en las figuras 19-4 20-4 21-4 y 22-4

Tabla 7: Prueba 5 con 600 épocas

PARÁMETROS	INICIALES	OPTIMIZADOS
K_p	0.00533917691419679	0.0533917691419679
T_i	0.03906588826738	0.03906588826738
T_d	0.0097664722066845	0.0097664722066845
α_d	1.5	1.5
α_i	1.5	1.5

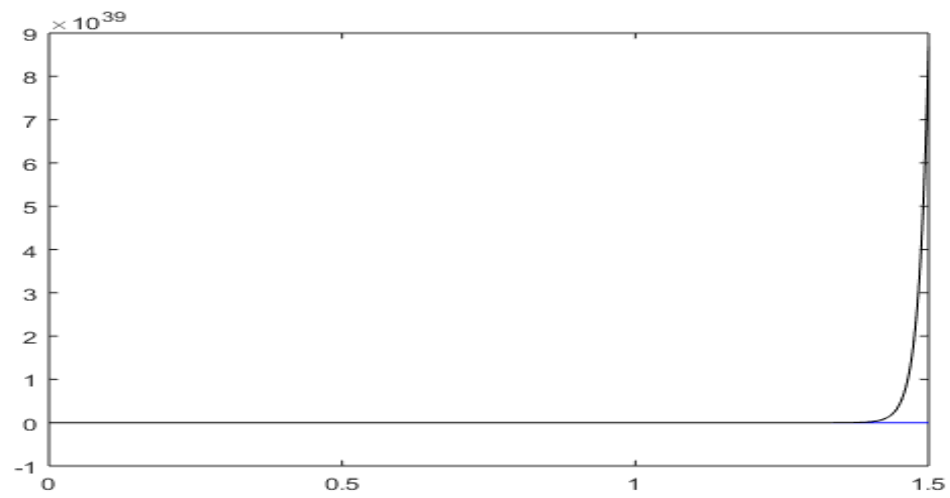


Gráfico 19-4: Prueba 5: Control No Entero con Parámetros sin Optimizar

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

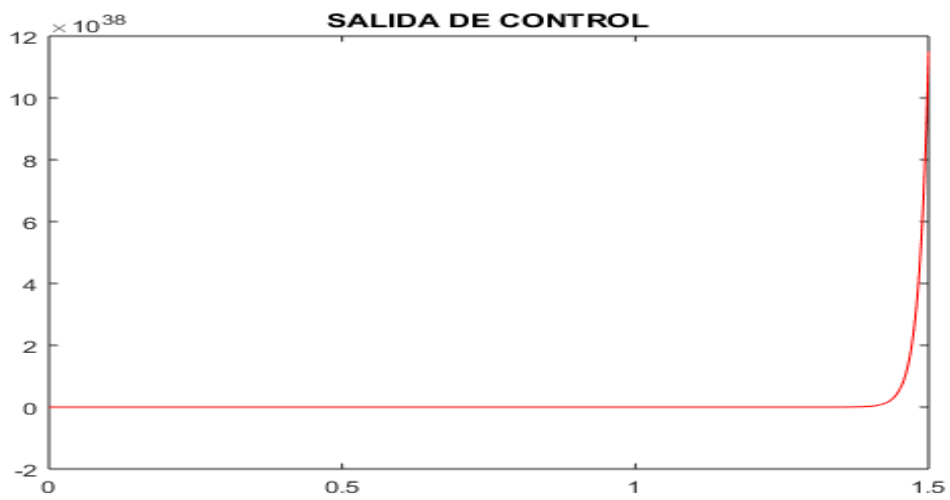


Gráfico 20-4: Prueba 5: Salida del Control

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016



Gráfico 21-4: Prueba 5: Función de Costo vs. Epocas de Entrenamiento

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

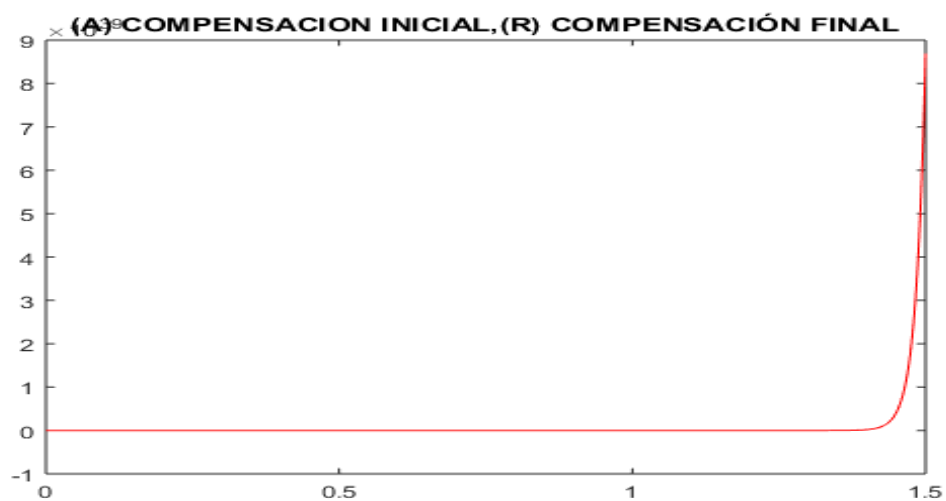


Gráfico 22-4: Prueba 5: Gráfica azul compensación inicial, roja compensación Final

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

4.3.7 Prueba 6 de los Controladores

Se procede a ejecutar el programa bajo un número máximo de épocas 700 y los parámetros optimizados se resumen en el Cuadro 8 y sus resultados se pueden observar en las figuras 23-4 24-4 25-4 y 26-4.

Tabla 8: Prueba 6 con 700 épocas

PARÁMETROS	INICIALES	OPTIMIZADOS
K_p	0.00533917691419679	0.00609819171715914
T_i	0.03906588826738	0.0692068405301226
T_d	0.0097664722066845	0.030213564511973
α_d	0.9	0.901573136722524
α_i	0.9	0.903978913455853

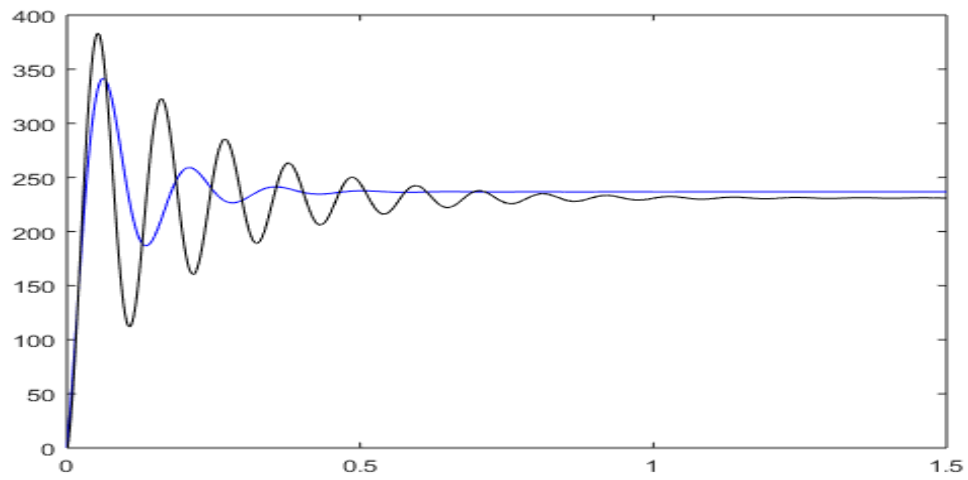


Gráfico 23-4: Control No Entero con Parámetros sin Optimizar

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

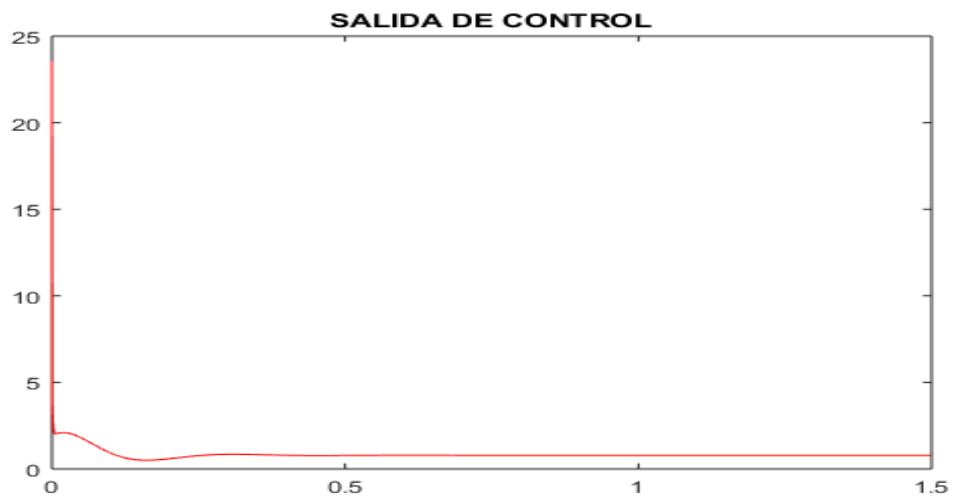


Gráfico 24-4: Salida 6 del Control

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

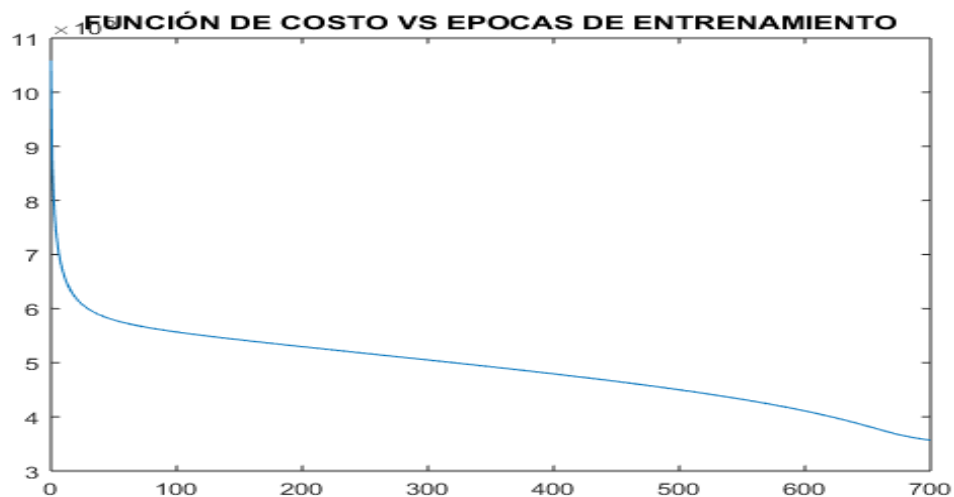


Gráfico 25-4: Función 6 de Costo vs. Epocas de Entrenamiento.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

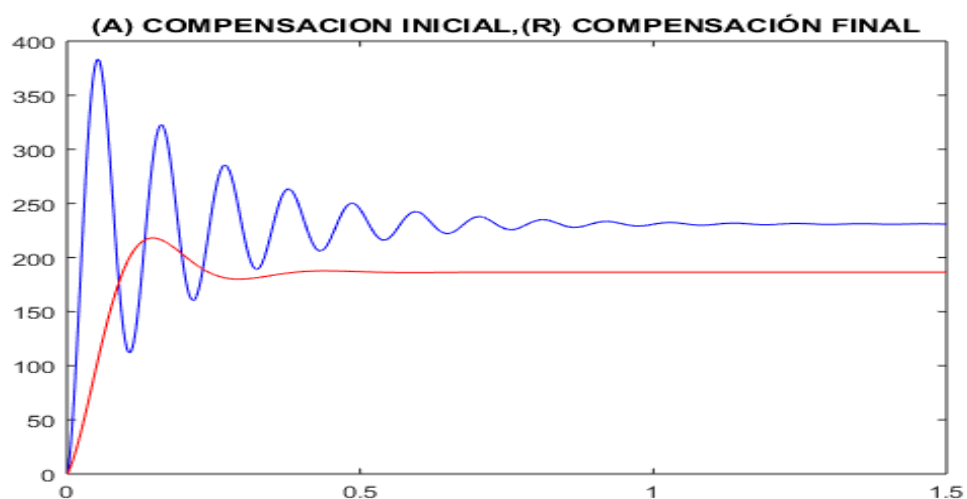


Gráfico 26-4: Gráfica 6 azul compensación inicial, gráfica roja compensación Final.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

4.3.8 Prueba 7 de los Controladores

Se procede a ejecutar el programa bajo un número máximo de épocas 800 y los parámetros optimizados se resumen en el Cuadro 11 y su respuesta se puede observar en las figuras 27-4 28-4 29-4 y 30-4.

Tabla 9: Prueba 7 con 800 épocas

PARÁMETROS	INICIALES	OPTIMIZADOS
K_p	0.00533917691419679	0.00431416046267005
T_i	0.03906588826738	0.0695250435843427
T_d	0.0097664722066845	0.0301285074622825
α_d	0.9	0.901456381551055
α_i	0.9	0.903983023110926

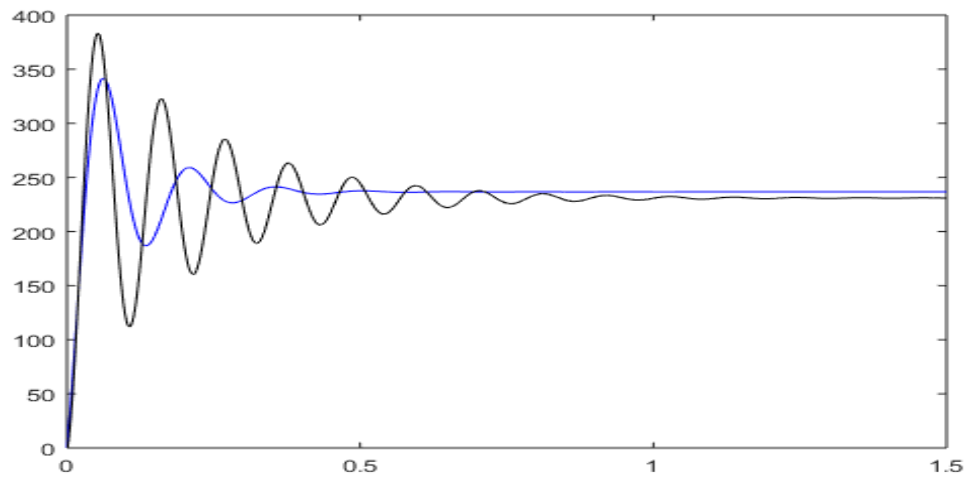


Gráfico 27-4: Control No Entero con Parámetros sin Optimizar.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

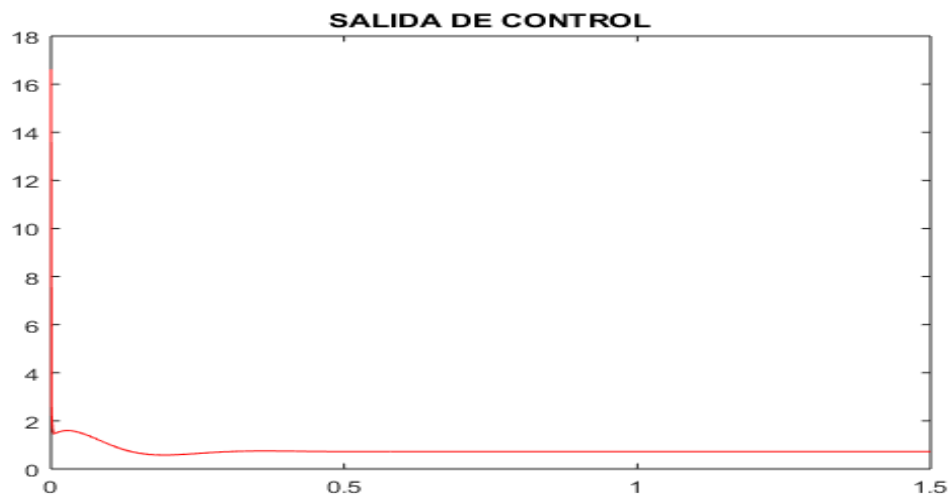


Gráfico 28-4: Salida 7 del Control.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

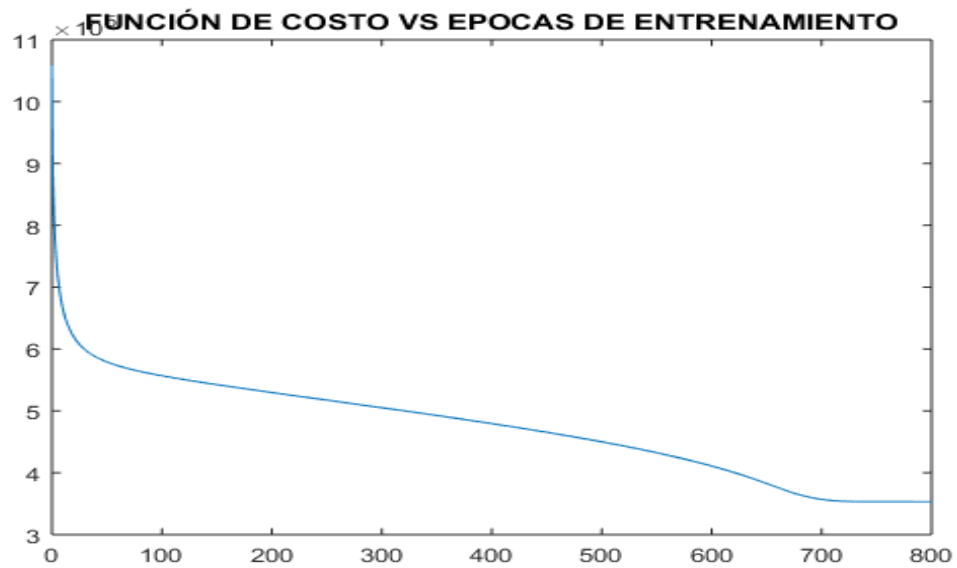


Gráfico 29-4: Función 7 de Costo vs. Épocas de Entrenamiento.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

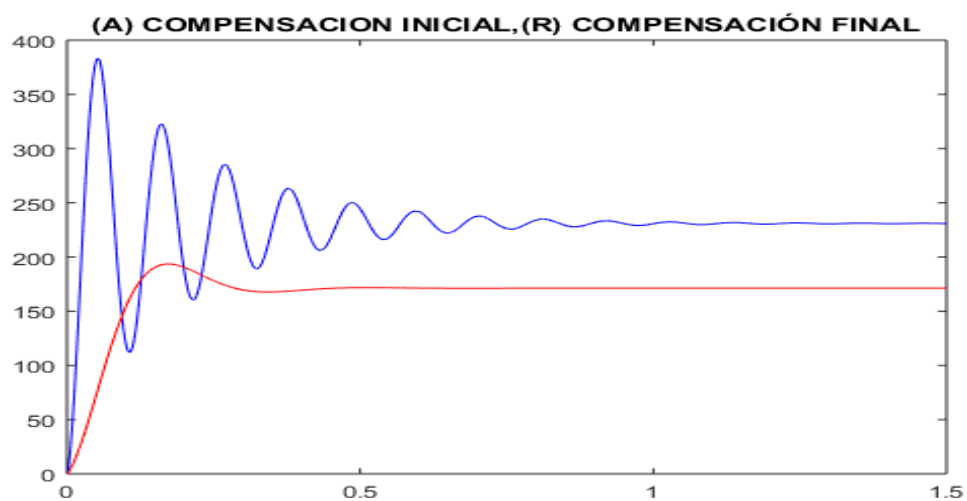


Gráfico 30-4: Gráfica 7 azul compensación inicial, gráfica roja compensación Final.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

4.4 Resultado del FOPID Usando Espacios de Estados

El desarrollo de las ecuaciones de espacio de estado se basa en el diagrama de la figura 32-4

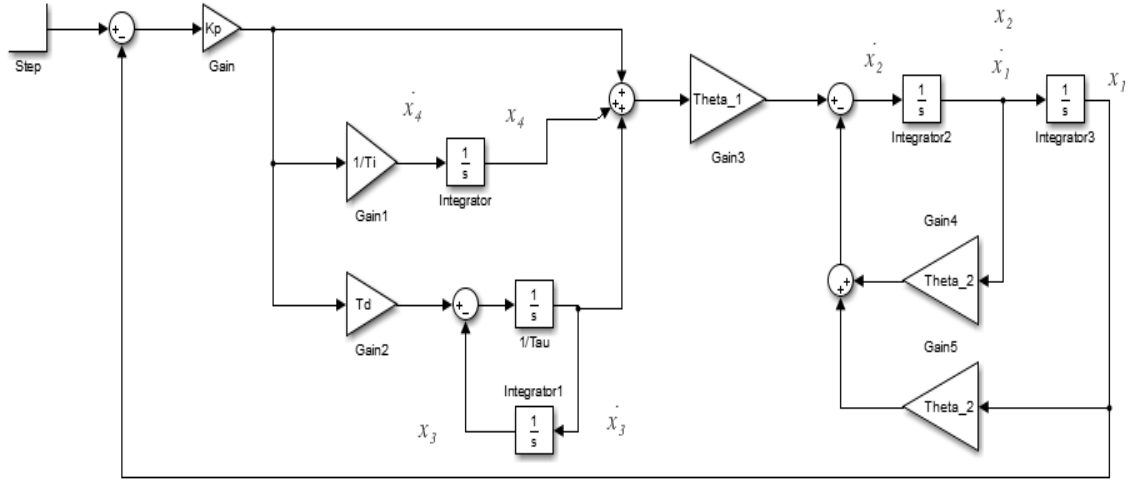


Gráfico 31-4: Diagra de Controlador Fractal No Entero y desarrollo de EE

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

$$\frac{s^2 + \frac{1}{T_D}s + \frac{1}{T_D T_i}}{\frac{1}{K_p T_D}s} \quad (226)$$

$$\frac{1}{T_D} = \theta_2 \quad (227)$$

$$\begin{cases} T_D = \frac{1}{\theta_2} \\ \frac{1}{T_D T_i} = \theta_3 \end{cases} \quad (228)$$

$$T_i = \frac{\theta_2}{\theta_3} \quad (229)$$

$$\frac{1}{K_p T_D} = \theta_1 \tau \quad (230)$$

$$\frac{1}{K_p} \theta_2 = \theta_1 \tau \quad (231)$$

$$K_p = \frac{\theta_2}{\theta_1 \tau} \quad (232)$$

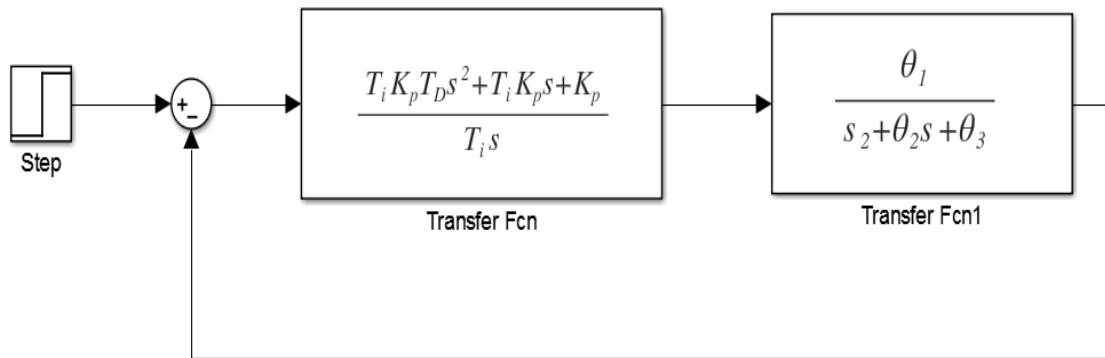
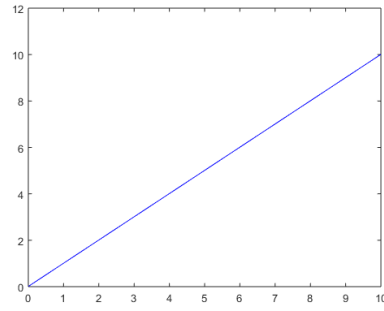


Gráfico 32-4: Simplificación y desarrollo FOPID en funciones de Transferencia.

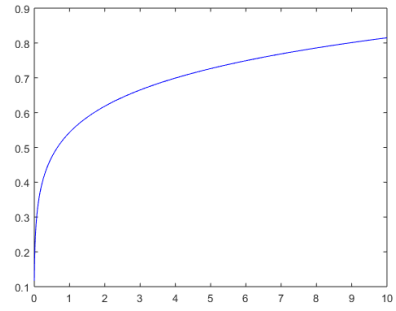
Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

4.4.1 Integral No Entera

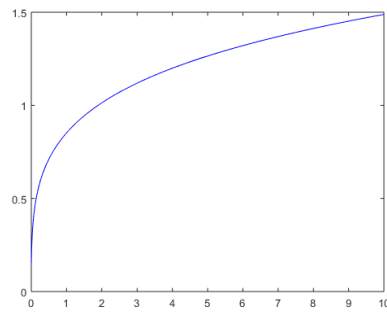
Se observa en la figura 33-4 comportamiento del resultado de la convolución entre una función rampa $f(t)$ espejular desplazada en el tiempo durante $t=10$ y la función $g(t)$ que es una función escalón, se puede observar fácilmente el efecto de α sobre el resultado final de la ecuación 9.



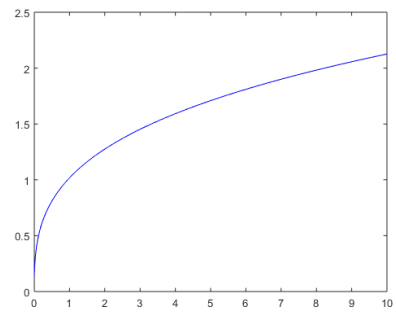
(a) $\alpha = 1$



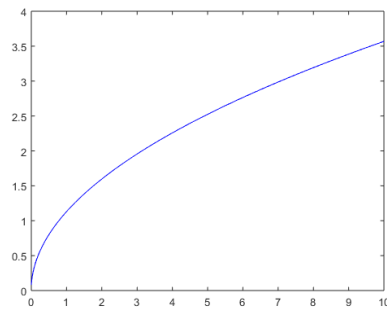
(b) $\alpha = 0,1$



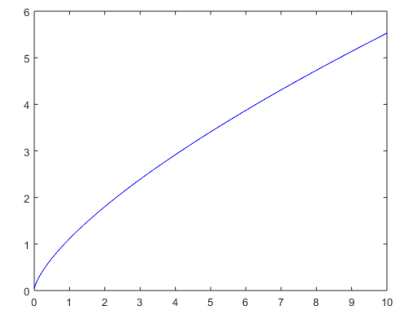
(c) $\alpha = 0,2$



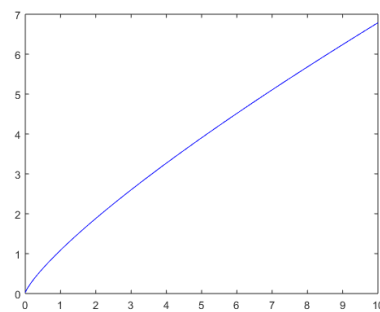
(d) $\alpha = 0,3$



(e) $\alpha = 0,5$



(f) $\alpha = 0,7$



(g) $\alpha = 0,8$

Gráfico 33-4: Integral No entera operadores de Riemann Liouville.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

4.5 Análisis de Resultados

4.5.1 FOPID con Aproximación Numérica

Una vez obtenidos los resultados finales de los controladores enteros y no enteros se condensan los parámetros finales en un conjunto de gráficas para analizar su comportamiento bajo ciertos valores.

4.5.2 Parámetros Iniciales sobre el Sistema

Asignando un valor de 1 tanto para α_i y α_d debido a que su comportamiento debe ser similar al del controlador entero se puede observar como influyen en el resultado del controlador No entero su variación, la mayoría de parámetros iniciales genera una señal de control aceptable que puede ser mejorada sin embargo en la prueba 3 y en la prueba 5 de la figura 34-4 se puede observar que llevan a una oscilación del sistema lo cual es desaprobado.

Tabla 10: Parámetros Iniciales para la evaluación de FOPID

PARÁMETROS	INICIALES
K_p	0.00533917691419679
T_i	0.03906588826738
T_d	0.0097664722066845
α_d	1
α_i	1

4.5.3 Señal del Salida de la Función de Costo

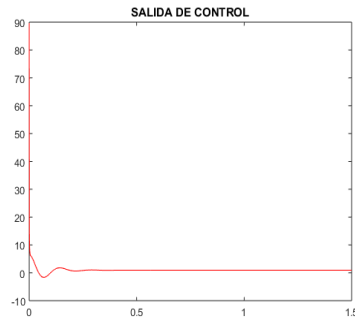
Se puede observar la evolución de la señal de costo con respecto al número de épocas ejecutadas y se observa en la figura 35-4 que en la prueba 3 y 5 no se ejecutó la optimización, por lo tanto no se obtuvieron parámetros optimizados, la configuración se rechaza.

4.5.4 Controlador No Entero Optimizado

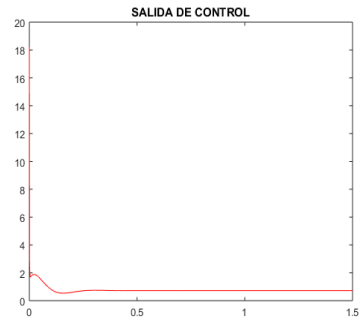
Se observa la salida del control no entero cuyos parámetros fueron optimizados, el valor de las variables analizadas que más reducen el error en estado estacionario se generaron en la prueba 1 y 4 como se observa en la figura 36-4, a su vez se rechaza el resultado de la prueba 3 y la prueba 5, la prueba 4 y la prueba 1 generan un sobre impulso mucho mayor y la prueba 2 la 7 su tiempo de estabilización es mayor.

Tabla 11: Parámetros Iniciales para la evaluación de FOPID

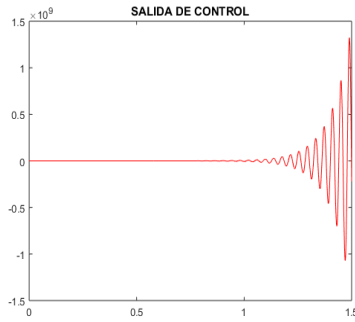
PRUEBA	VALORES
<i>Prueba1</i>	$\alpha_i = 1 \ \alpha_d = 1$
<i>Prueba2</i>	$\alpha_i = 0,9 \ \alpha_d = 0,9$
<i>Prueba3</i>	$\alpha_i = 0,8 \ \alpha_d = 0,8$
<i>Prueba4</i>	$\alpha_i = 1,1 \ \alpha_d = 1,1$
<i>Prueba5</i>	$\alpha_i = 1,2 \ \alpha_d = 1,2$
<i>Prueba6</i>	$\alpha_i = 1,3 \ \alpha_d = 1,3$
<i>Prueba7</i>	$\alpha_i = 1,4 \ \alpha_d = 1,4$



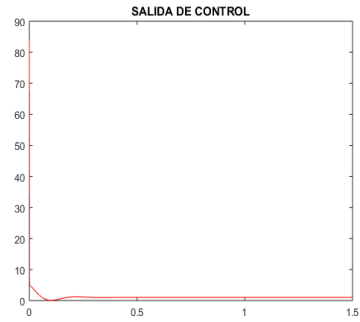
(a) Prueba 1



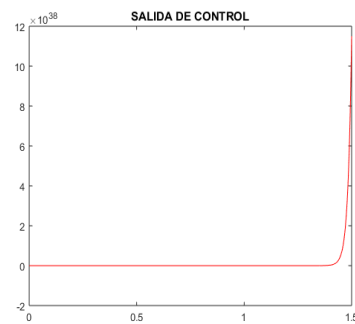
(b) Prueba 2



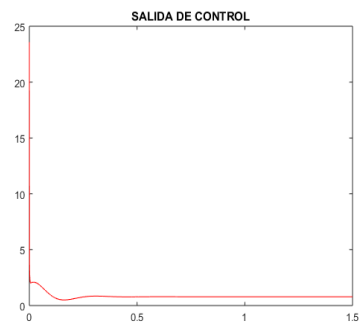
(c) Prueba 3



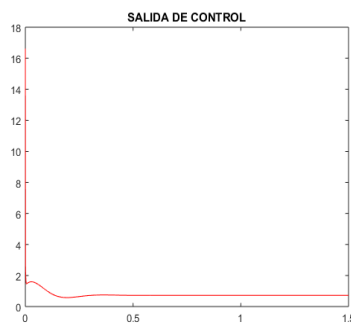
(d) Prueba 4



(e) Prueba 5



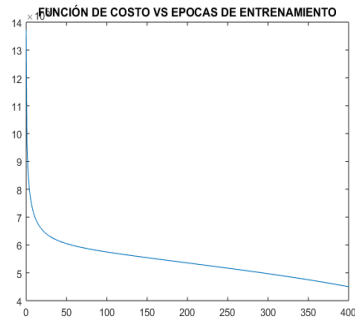
(f) Prueba 6



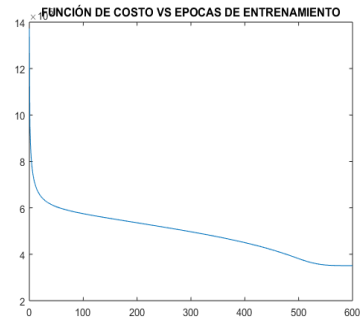
(g) Prueba 7

Gráfico 34-4: Salida de la señal Control No Entero con sin Optimizar.

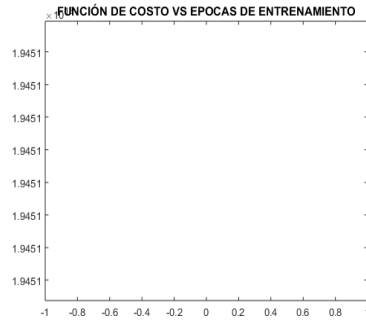
Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016



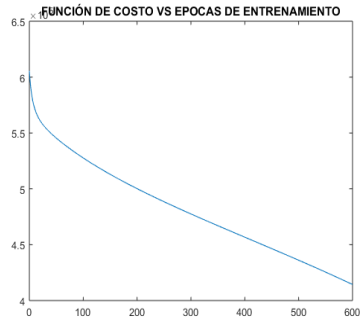
(a) Prueba 1



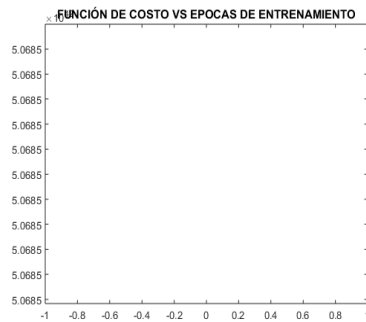
(b) Prueba 2



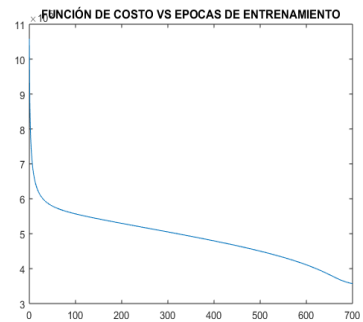
(c) Prueba 3



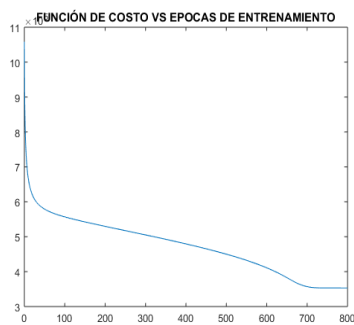
(d) Prueba 4



(e) Prueba 5



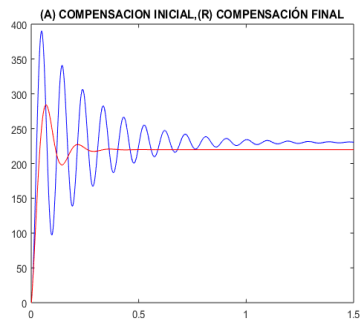
(f) Prueba 6



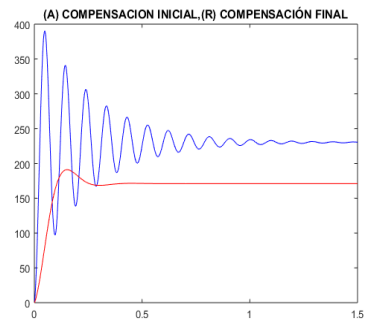
(g) Prueba 7

Gráfico 35-4: Variación de la Función de Costo y el número de Épocas.

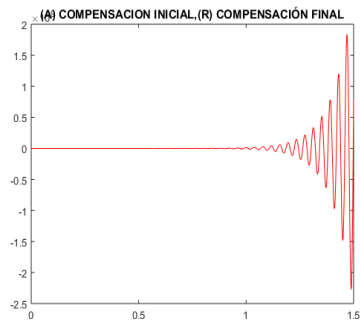
Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016



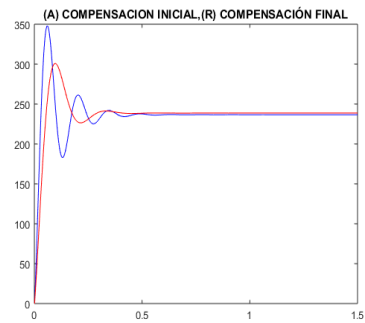
(a) Prueba 1



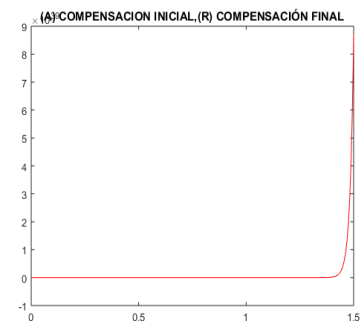
(b) Prueba 2



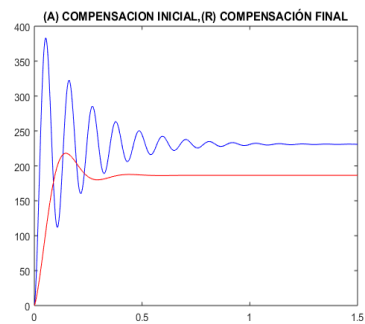
(c) Prueba 3



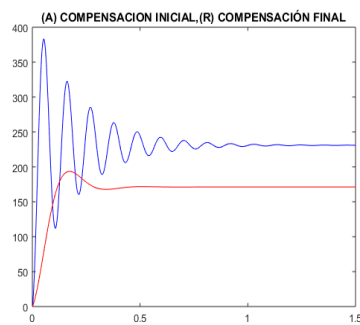
(d) Prueba 4



(e) Prueba 5



(f) Prueba 6



(g) Prueba 7

Gráfico 36-4: Señales de Control Inicial y Optimizada (rojo).

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

4.5.5 FOPID con Espacio de Estados

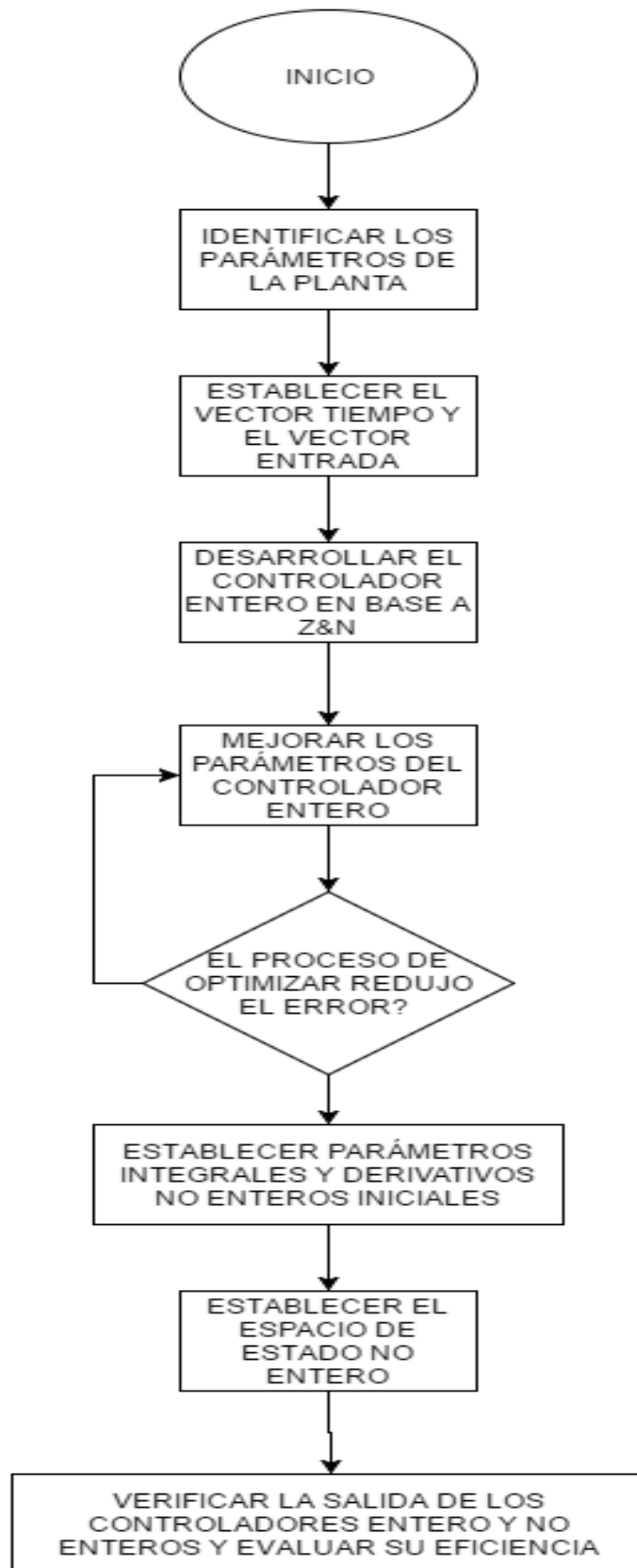


Gráfico 37-4: Diagrama de Flujo del desarrollo de los controladores.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

4.5.6 Parámetros Iniciales del Sistema

El proceso evaluación del controlador fractal partirá usando los valores optimizados del control entero descritos en la sección 4.2 y las variables no enteras integrales y derivadas variarán en décadas de manera progresiva, los resultados son los mostrados en las siguientes figuras.

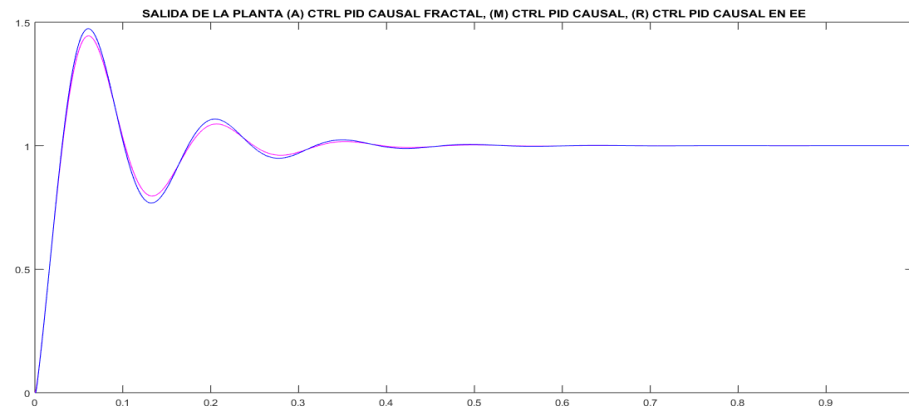


Gráfico 38-4: $\alpha_i = 1$ y $\alpha_d = 1$.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

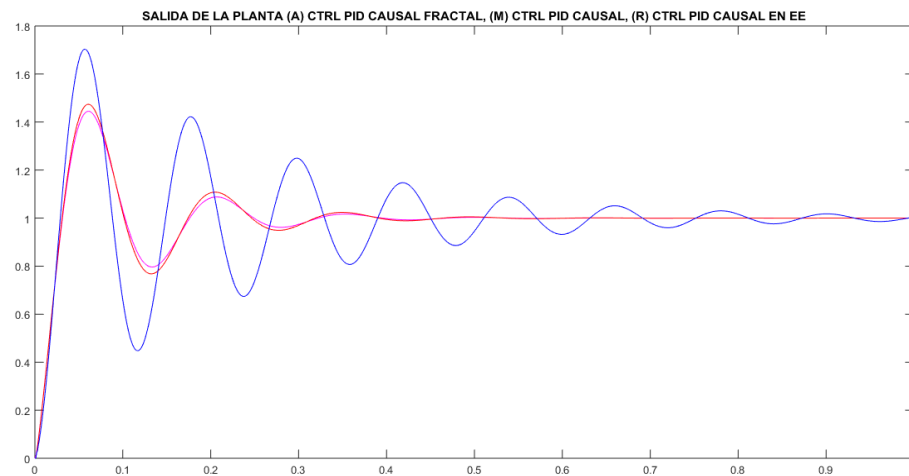


Gráfico 39-4: $\alpha_i = 0,9$ y $\alpha_d = 0,9$.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

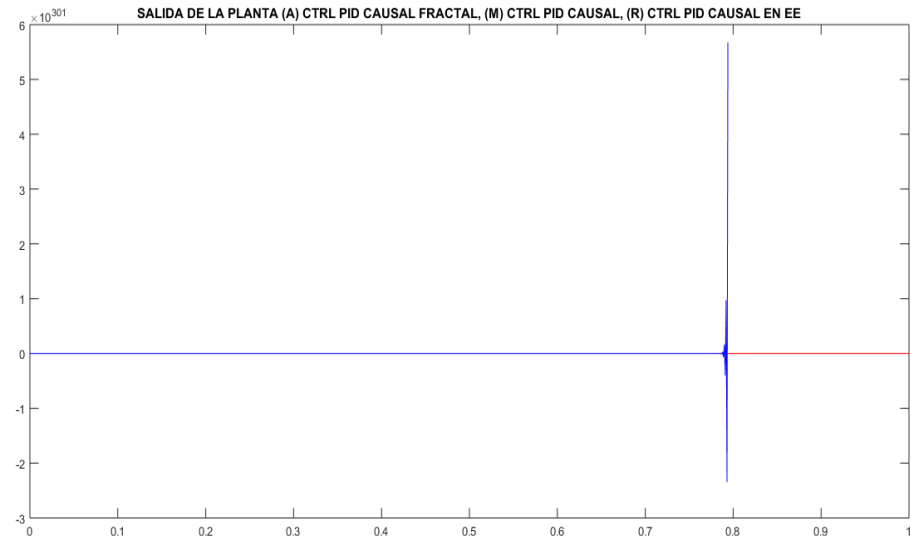


Gráfico 40-4: $\alpha_i = 0,8$ y $\alpha_d = 0,8$.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

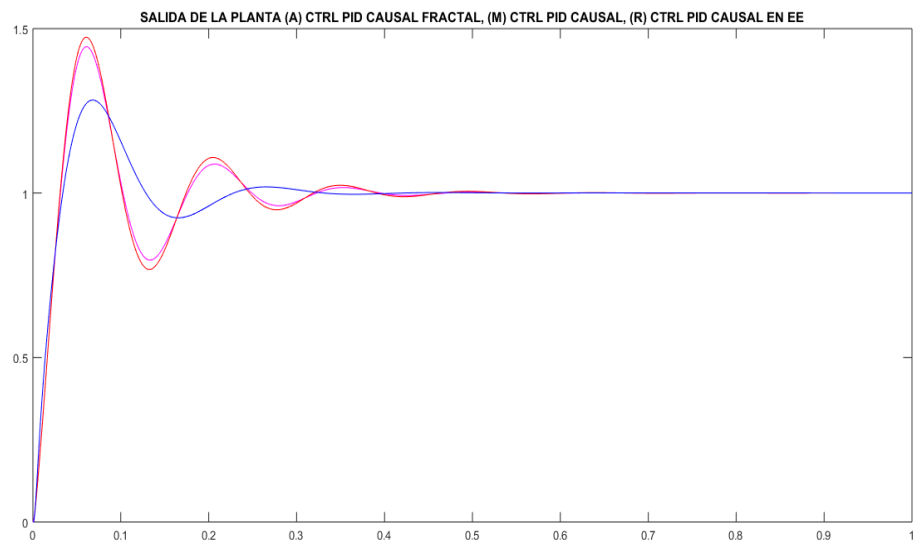


Gráfico 41-4: $\alpha_i = 1,1$ y $\alpha_d = 1,1$.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

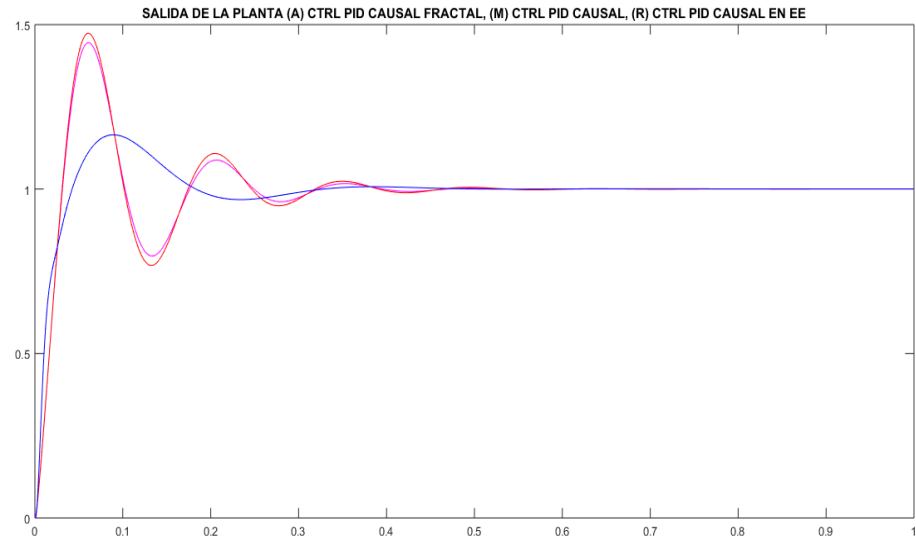


Gráfico 42-4: $\alpha_i = 1,2$ y $\alpha_d = 1,2$.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

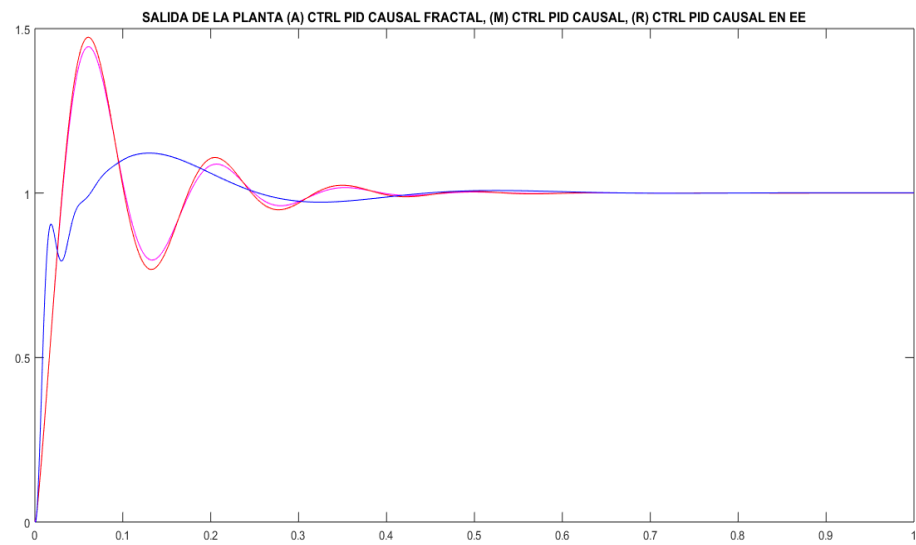


Gráfico 43-4: $\alpha_i = 1,3$ y $\alpha_d = 1,3$.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

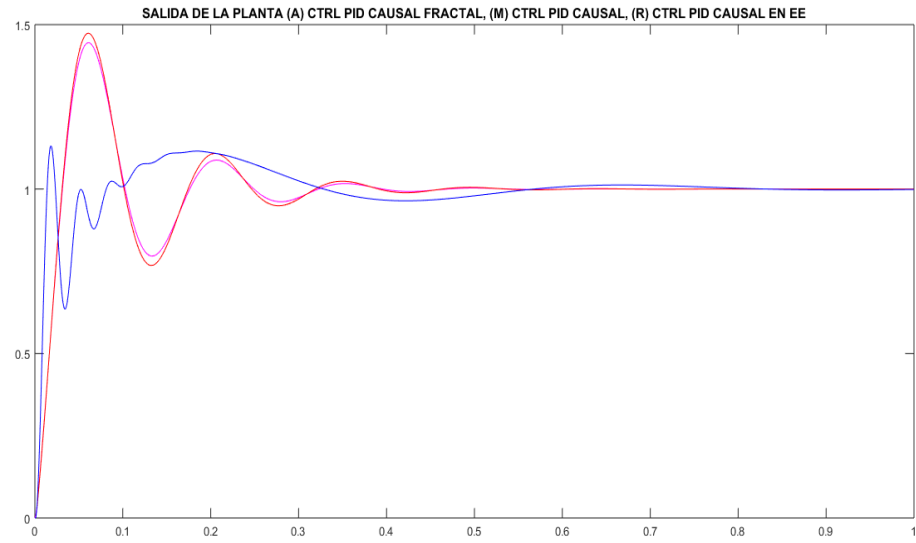


Gráfico 44-4: $\alpha_i = 1,4$ y $\alpha_d = 1,4$.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

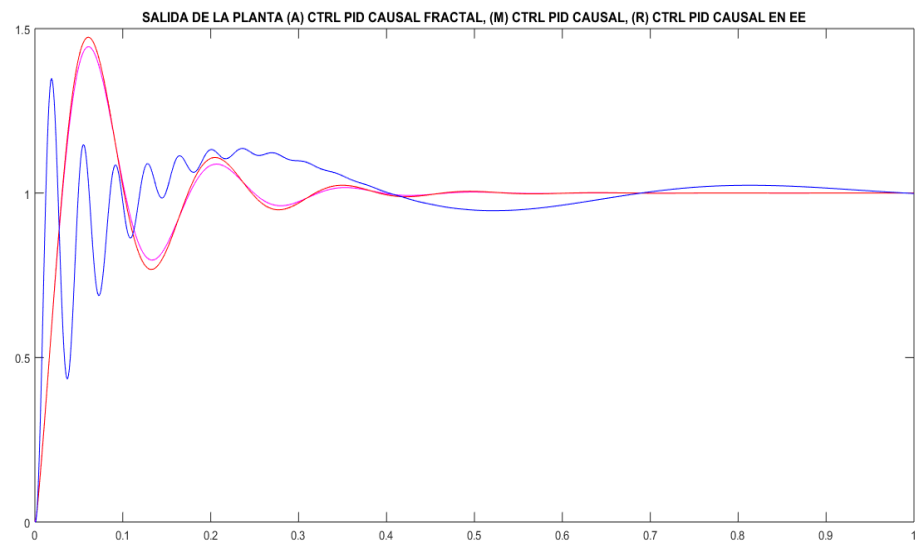


Gráfico 45-4: $\alpha_i = 1,5$ y $\alpha_d = 1,5$.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

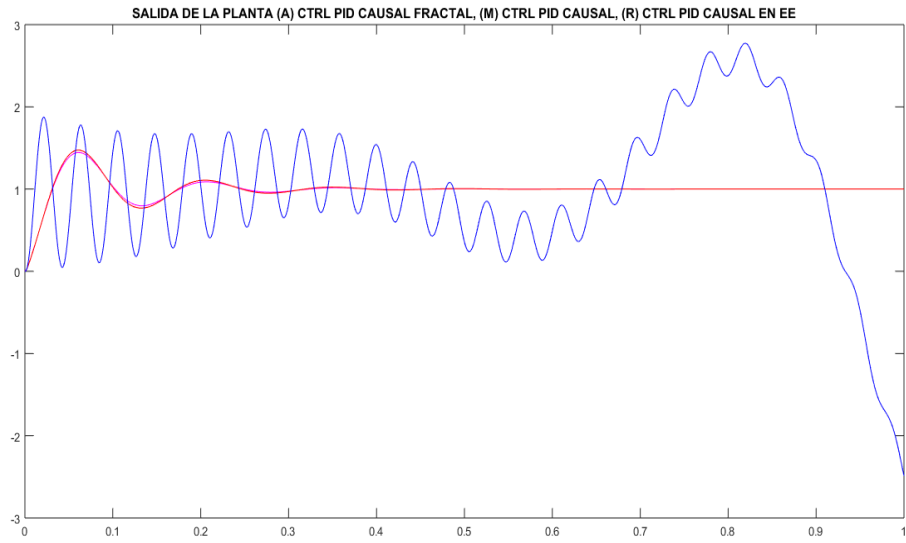


Gráfico 46-4: $\alpha_i = 1$ y $\alpha_d = 2$.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

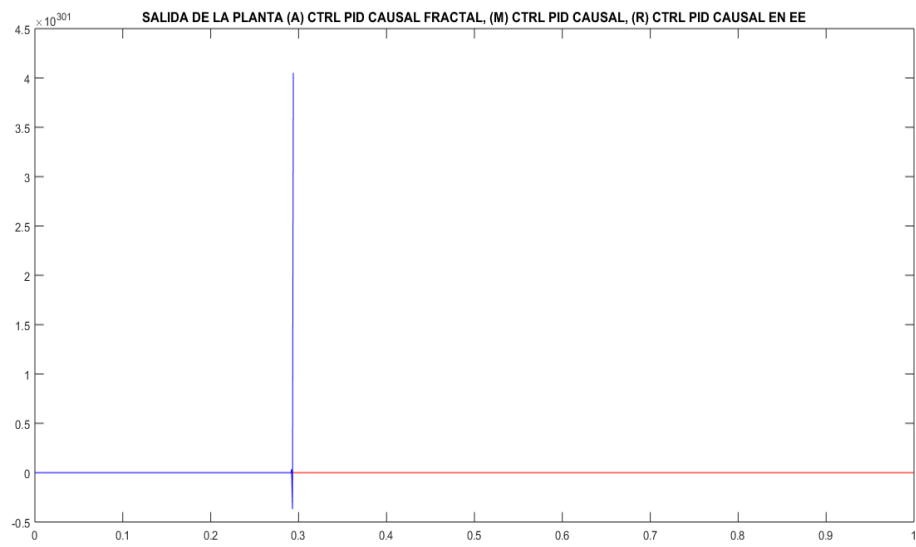


Gráfico 47-4: $\alpha_i = 1$ y $\alpha_d = 0,6$.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

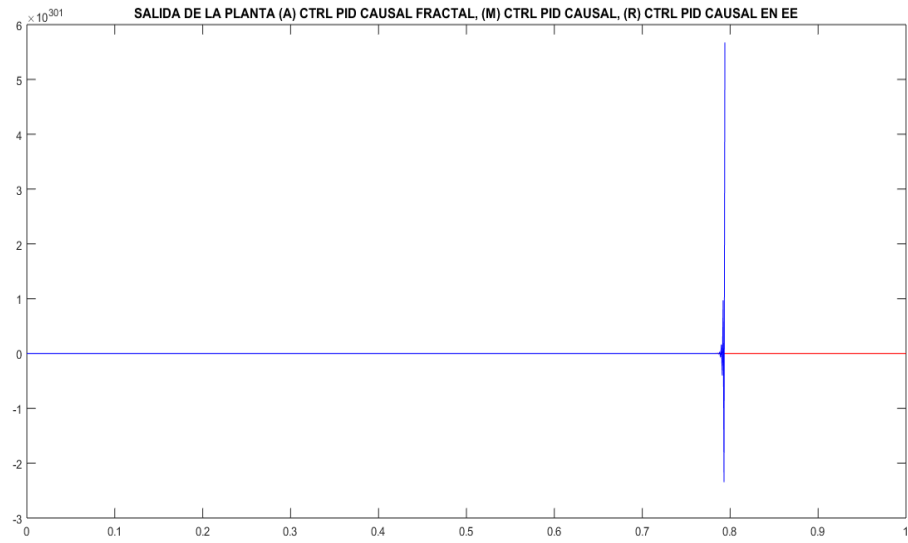


Gráfico 48-4: $\alpha_i = 1$ y $\alpha_d = 0,8$.

Autor: *Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016*

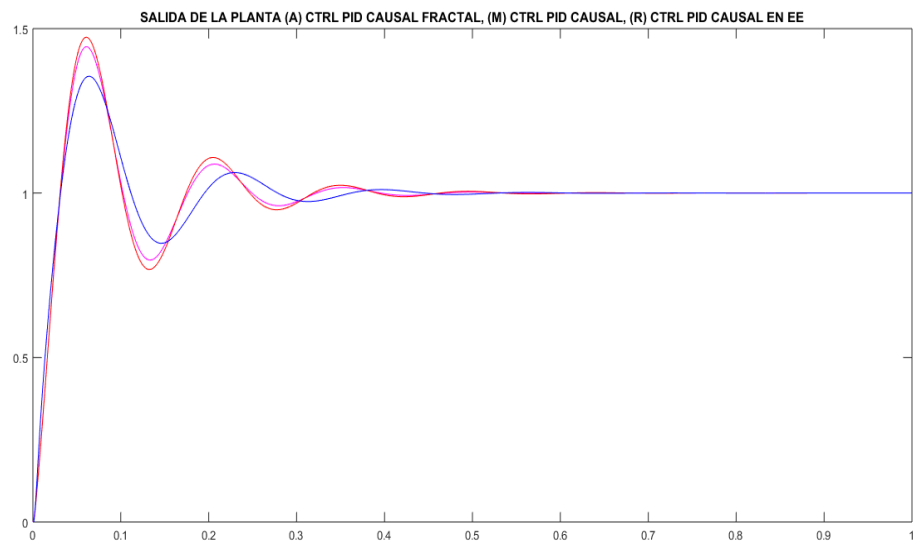


Gráfico 49-4: $\alpha_i = 1$ y $\alpha_d = 1,1$.

Autor: *Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016*

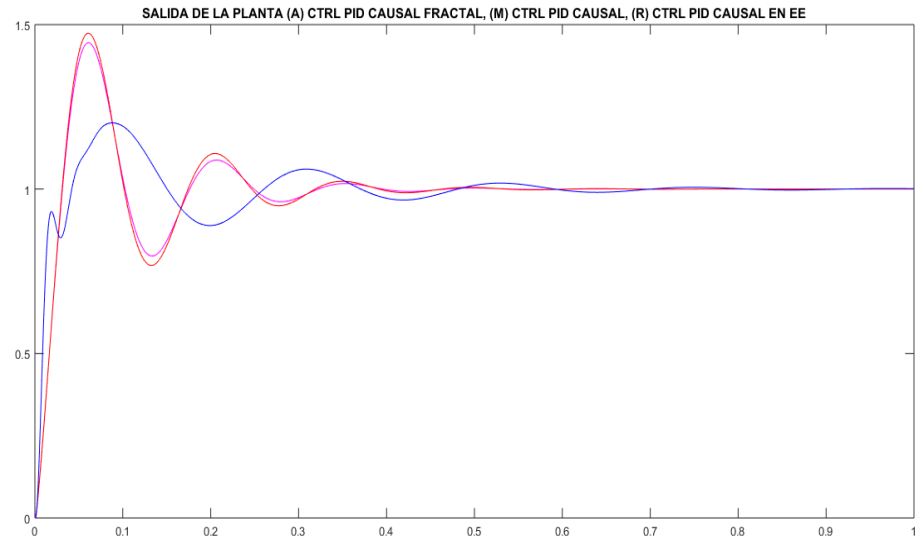


Gráfico 50-4: $\alpha_i = 1$ y $\alpha_d = 1,3$.

Autor: *Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016*

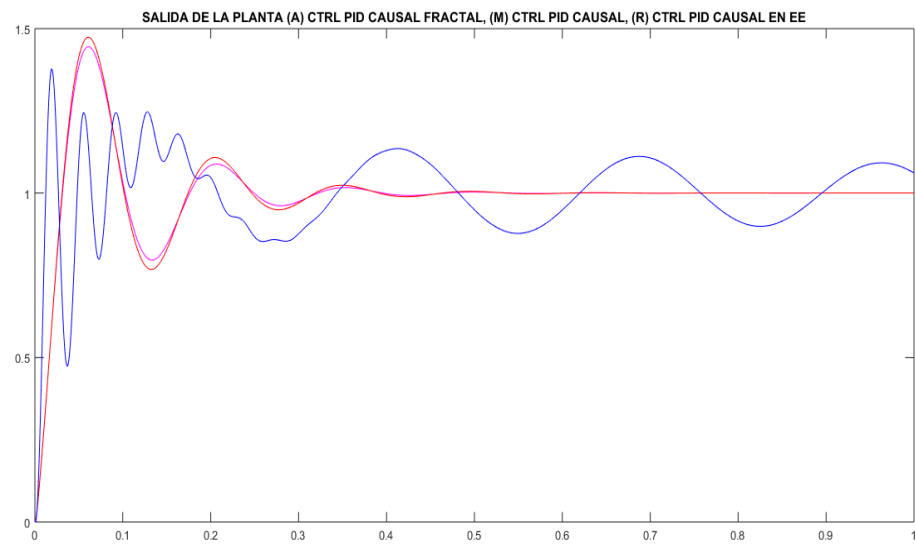


Gráfico 51-4: $\alpha_i = 1$ y $\alpha_d = 1,5$.

Autor: *Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016*

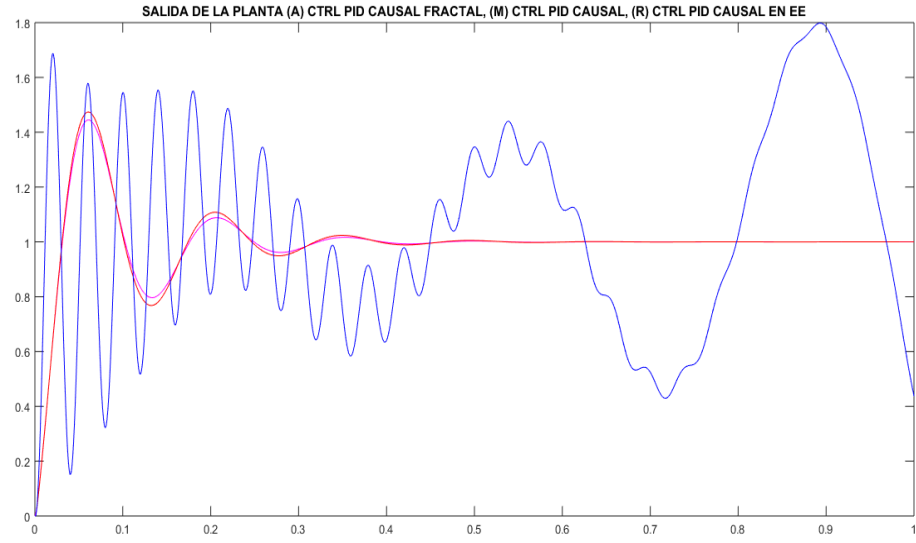


Gráfico 52-4: $\alpha_i = 1$ y $\alpha_d = 1,6$.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

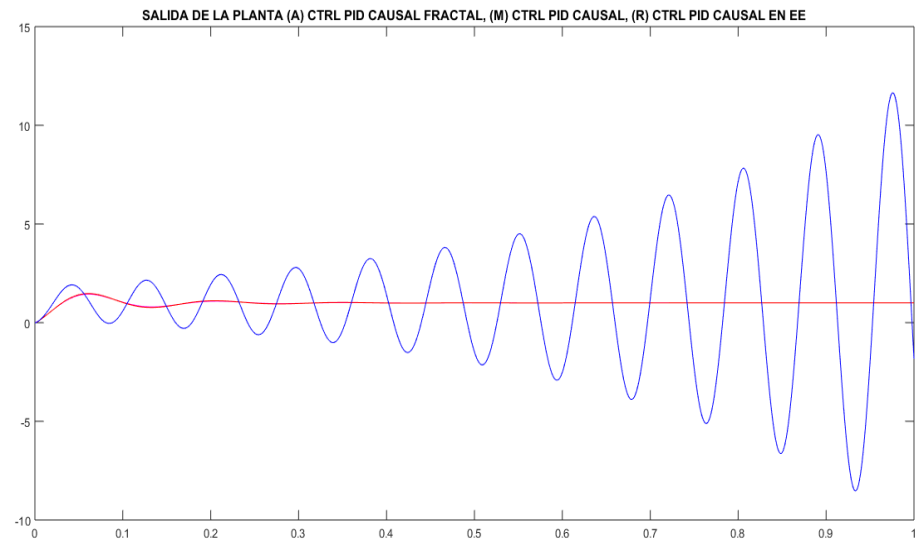


Gráfico 53-4: $\alpha_i = 0,6$ y $\alpha_d = 1$.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

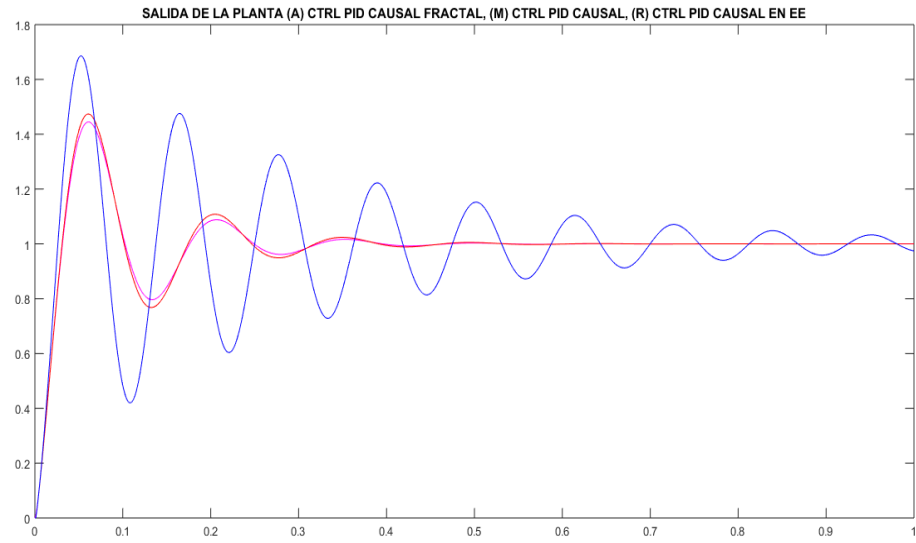


Gráfico 54-4: $\alpha_i = 0,8$ y $\alpha_d = 1$.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

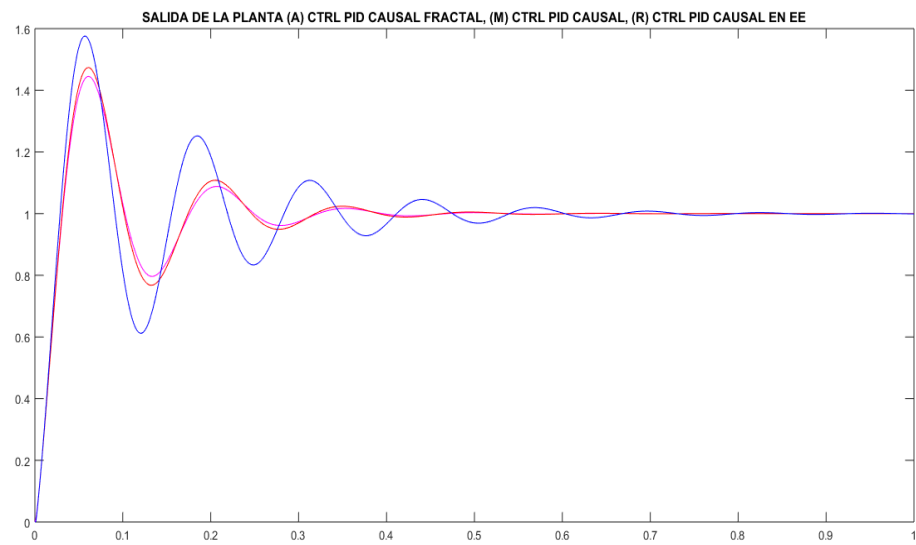


Gráfico 55-4: $\alpha_i = 0,9$ y $\alpha_d = 1$.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

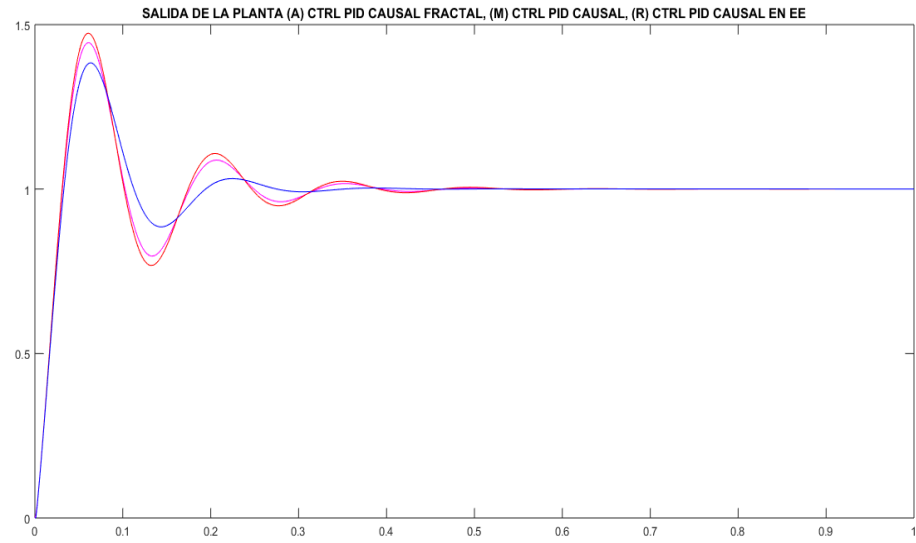


Gráfico 56-4: $\alpha_i = 1,1$ y $\alpha_d = 1$.

Autor: *Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016*

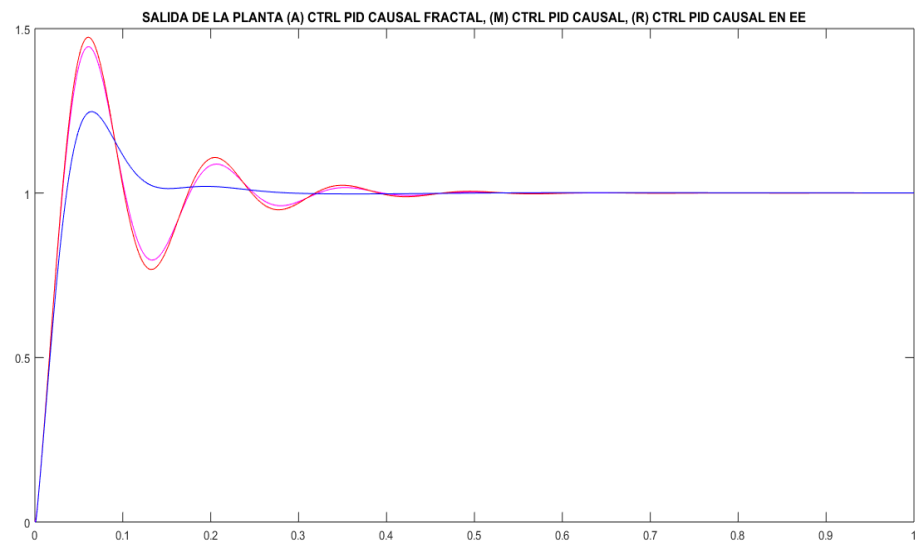


Gráfico 57-4: $\alpha_i = 1,3$ y $\alpha_d = 1$.

Autor: *Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016*

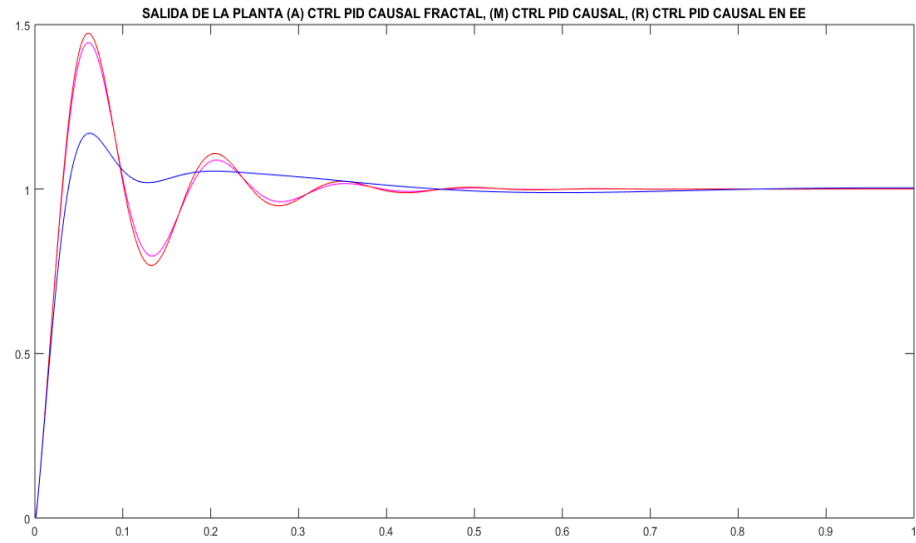


Gráfico 58-4: $\alpha_i = 1,5$ y $\alpha_d = 1$.

Autor: *Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016*

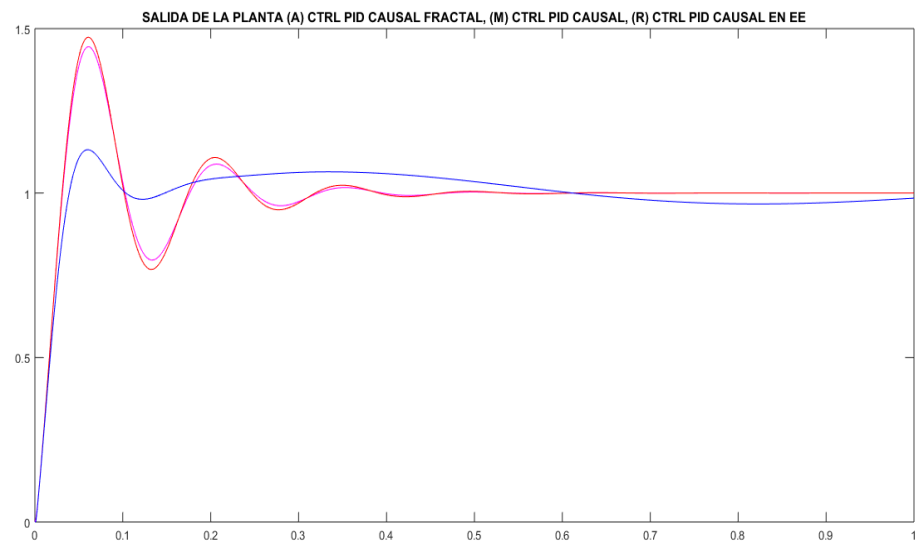


Gráfico 59-4: $\alpha_i = 1,7$ y $\alpha_d = 1$.

Autor: *Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016*

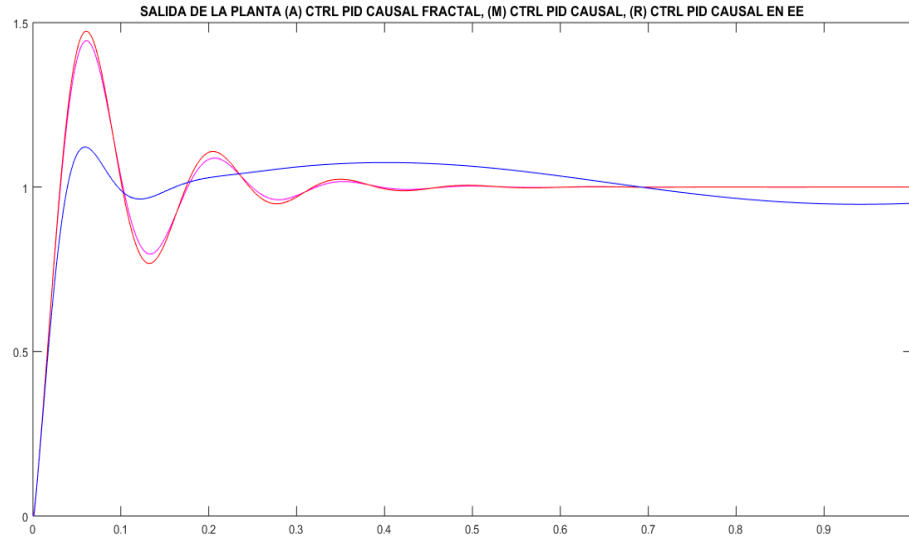


Gráfico 60-4: $\alpha_i = 1,8$ y $\alpha_d = 1$.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

4.6 DEMOSTRACIÓN DE HIPÓTESIS

Se procederá a la comprobación o rechazo de la hipótesis establecida de la siguiente manera:

El desarrollo de un controlador robusto del tipo PID no entero basado en métodos numéricos y el aumento en dos grados de libertad con respecto a los controladores robustos enteros, incrementan su eficiencia para gobernar una planta experimental. Para ello se considerará tres aspectos importantes en la ejecución de cada controlador, estos son:

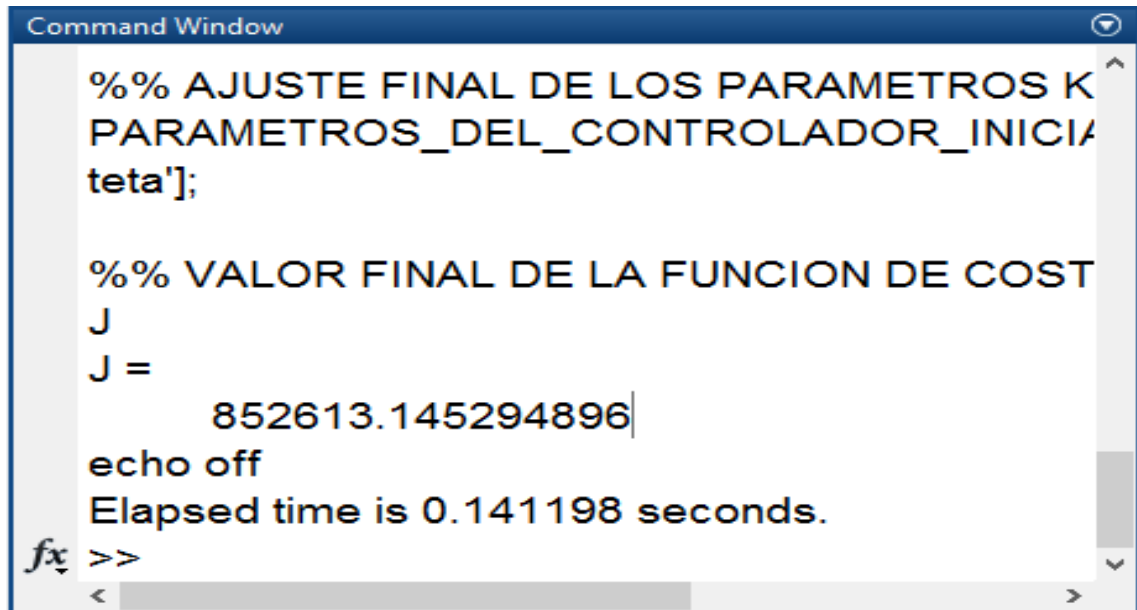
1. Tiempo de ejecución del algoritmo
2. Tiempo de ejecución de la optimización.
3. Compensación del Controlador.

4.6.1 Tiempo de Ejecución del Algoritmo

Se ejecuta los algoritmos entero y no entero bajo valores de parámetros similares como son:

4.6.2 Control Entero

$$\begin{cases} K_p = 0,0533917691419679 \\ T_I = 0,039065888826738 \\ T_D = 0,0097664722066845 \end{cases} \quad (233)$$



```

%% AJUSTE FINAL DE LOS PARAMETROS K
PARAMETROS_DEL_CONTROLADOR_INICIAL
teta'];

%% VALOR FINAL DE LA FUNCION DE COST
J
J =
    852613.145294896
echo off
Elapsed time is 0.141198 seconds.
fx >>

```

Gráfico 61-4: Tiempo total de ejecución del algoritmo entero.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

Control Fractal Aproximación Numérica

$$\begin{cases} K_p = 0,0533917691419679 \\ T_I = 0,039065888826738 \\ T_D = 0,0097664722066845; \alpha_I = 1 \\ \alpha_D = 1 \end{cases} \quad (234)$$

```

Command Window

Column 7
      0
    9.081362352008e-06

%% VALOR FINAL DE LA FUNCION DE COSTO
J
J =
    436087.347839307
echo off
Elapsed time is 520.551071 seconds.
fx >>

```

Gráfico 62-4: Tiempo de ejecución del algoritmo fractal usando Aproximaciones.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

Por lo tanto, si aplicamos la ecuación 235

$$\frac{t_e - t_f}{t_e} \quad (235)$$

Podemos deducir gracias al resultado 3685.67453505 que el controlador no entero se ejecuta en menor tiempo que el control fractal.

Control Fractal Espacio de Estados

$$\left\{ \begin{array}{l} K_p = 0,0533917691419679 \\ T_I = 0,039065888826738 \\ T_D = 0,0097664722066845; \alpha_I = 1 \\ \alpha_D = 1 \end{array} \right. \quad (236)$$

```

Command Window
132637.999870014
echo off
Elapsed time is 57520.773858 seconds.
% AJUSTE FINAL DE LOS PARAMETROS KP TI TD
PARAMETROS_DEL_CONTROLADOR_INICIALyFINAL=[teta_inicial
teta]
PARAMETROS_DEL_CONTROLADOR_INICIALyFINAL =
Columns 1 through 3
    0.00563847135990719    0.139943631811356    0.00385774579370111
    0.00608812649217935    0.144495934181504    0.0018106339680445
Columns 4 through 5
           1           1
    1.02334504832633    1.00793776430908
% VALOR FINAL DE LA FUNCION DE COSTO
J
J =
    132128.812164771
echo off
fx >>

```

Gráfico 63-4: Tiempo de ejecución del algoritmo fractal Espacio de Estados.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

En la figura 63-4 los resultados finales de los parámetros optimizados en un tiempo de 16 horas y se puede determinar el incremento de los parámetros no enteros de 1 a 1.0233 en el caso integral y de 1 a 1.0079 en el caso derivativo. Aplicando la ecuación 235 se obtiene un valor de 407675.66 por lo tanto del controlador entero se ejecuta en menor tiempo que el No entero.

4.6.3 Valor de la Función de Costo

Se aplica una optimización de para cada tipo de controlador dando como resultado:

4.6.4 Control Entero

Se puede observar que el valor de la función de costo tanto en el control entero como en el no entero bajo los mismos parámetros y como resultado el valor de J en el control entero es mayor que en el control fractal por lo tanto los parámetros del control entero fueron mejor ajustados.

$$K_p = 0,0533917691419679; T_I = 0,039065888826738; T_D = 0,0097664722066845 \quad (237)$$

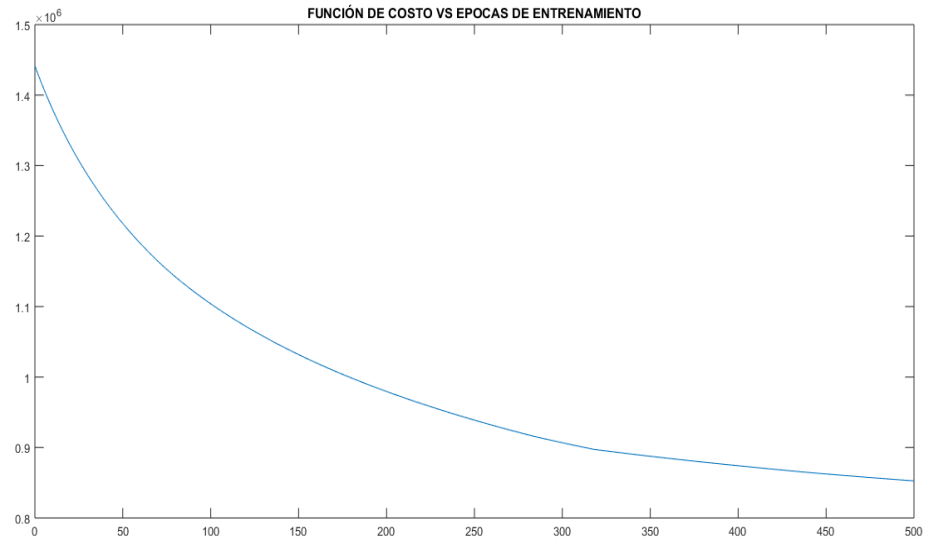


Gráfico 64-4: Variación de la Función de Costo en el Control Entero 500 épocas.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

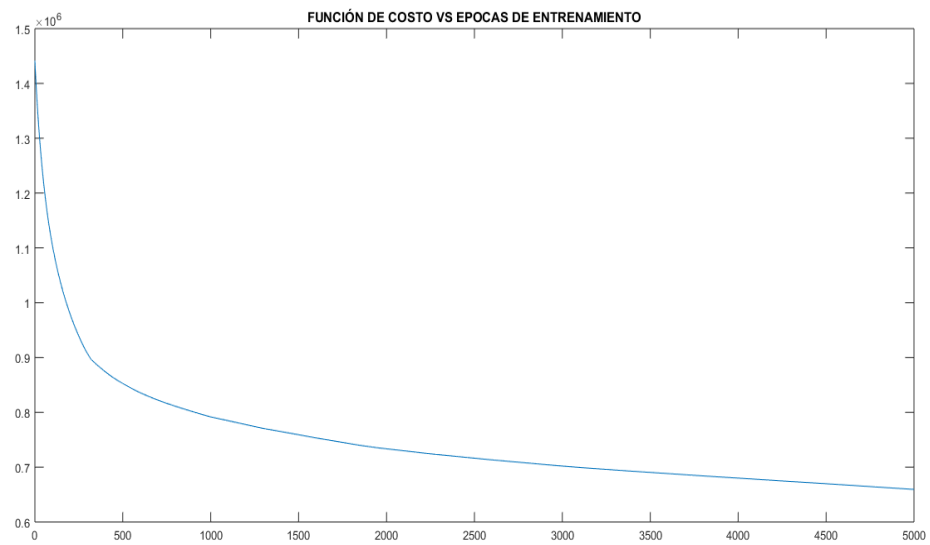


Gráfico 65-4: Variación de la Función de Costo en el Control Entero 5000 épocas.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

Control Fractal con Aproximación Numérica

$$\left\{ \begin{array}{l} K_p = 0,0533917691419679 \\ T_I = 0,039065888826738 \\ T_D = 0,0097664722066845 \\ \alpha_I = 1; \alpha_D = 1 \end{array} \right. \quad (238)$$

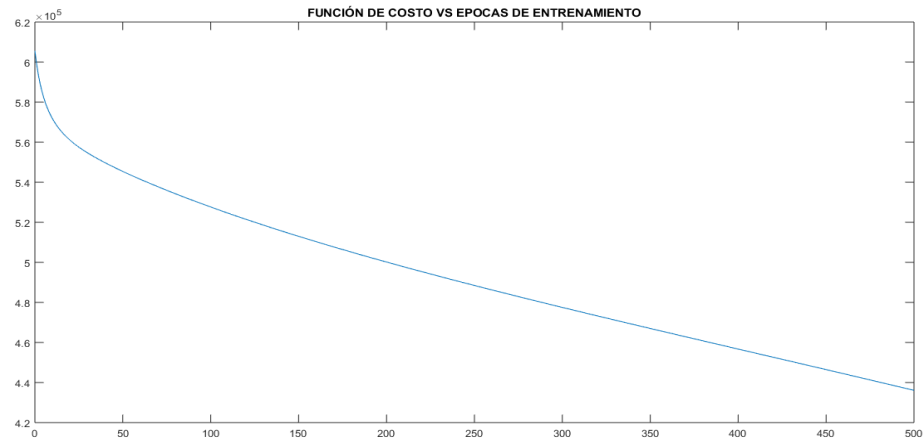


Gráfico 66-4: Función de Costo en el FOPID 500 épocas Aproximación Numérica.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

Control Fractal con Espacio de Estados

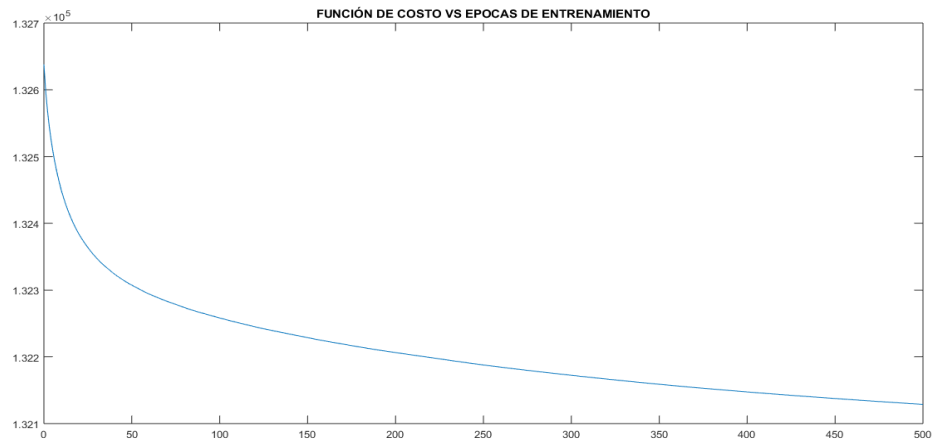


Gráfico 67-4: Función de Costo en el Control No Entero usando Espacio de Estados.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

4.6.5 Compensación

El objetivo de un controlador es imitar la señal de entrada en la salida del sistema, por lo cual se compara los dos controladores tanto entero como no entero y se puede diferenciar su comportamiento durante un tiempo determinado, en la figura 71-4 se puede observar con detalle el efecto fractal al lograr obtener una señal de salida mejorada y mejor sintonizada luego del proceso de optimización.

Control Entero

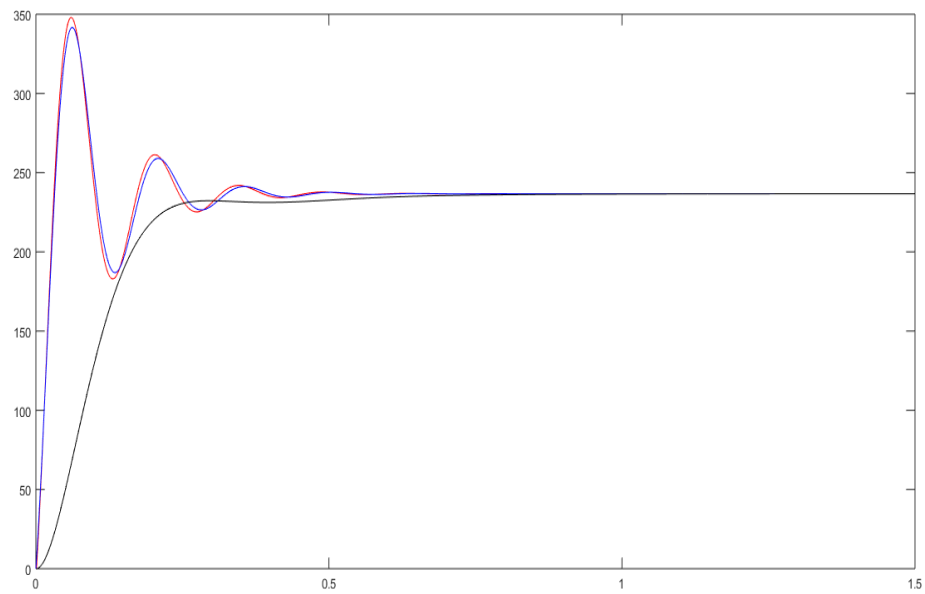


Gráfico 68-4: Salida del Controlador Entero Optimizado y no Optimizado.

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

Control No Entero con Aproximación Numérica

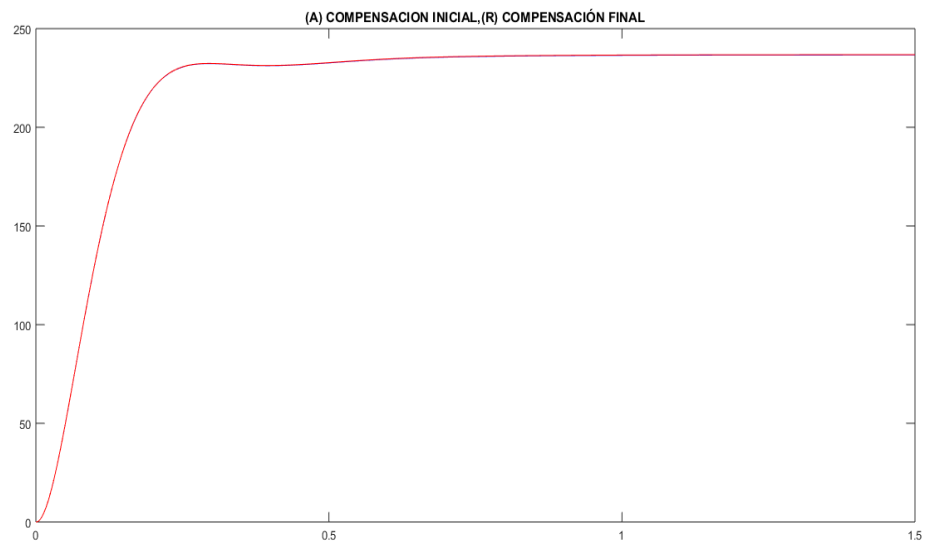


Gráfico 69-4: Salida del Control No Entero Optimizado (rojo)

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

Control No Entero en Espacio de Estados

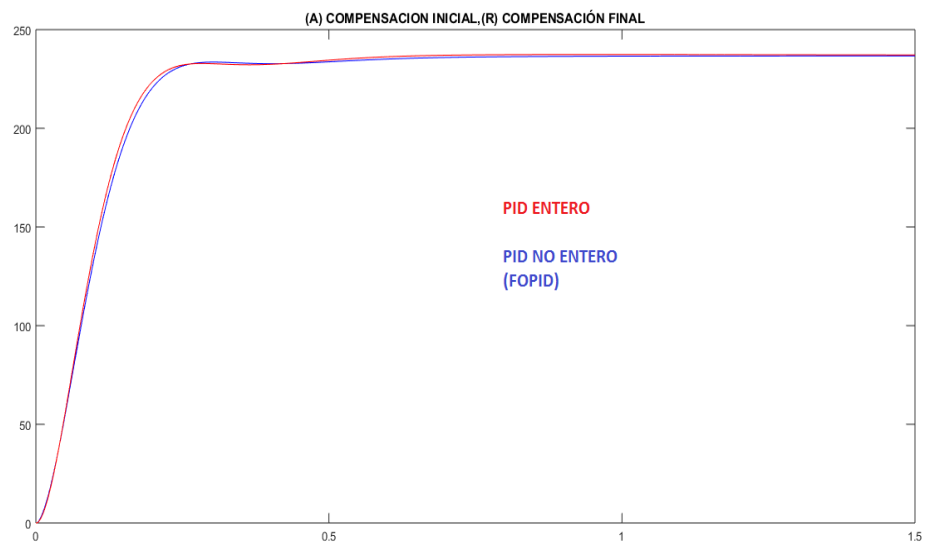


Gráfico 70-4: Control Entero Optimizado (rojo) y No Entero Optimizado (azul).

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016



Gráfico 71-4: Control Entero Optimizado (rojo) y No Entero Optimizado(azul).

Autor: Jorge Luis Paucar Samaniego, 2016

En base a las gráficas obtenidas se puede visualizar que existe una tendencia a la estabilización *figura 67-4* en la gráfica de optimización del controlador no entero en espacio de estados lo que significa que si el algoritmo continúa en ejecución se obtendrá una optimización mayor lo cual no sucede en el controlador no entero *figura 67-4* usando aproximaciones numéricas.

Con los resultados obtenidos para esta planta en particular ***No existe ningún caso en el cual el controlador no entero desarrollado en base a aproximaciones numéricas sea más eficiente que el controlador entero usando métodos de aproximación numérica y entonación en base al primer método de Ziegler and Nichols.***

En cambio, ***Si se utiliza un controlador No Entero desarrollado en base a la predicción del espacio de estados logró reducir el error en estado estacionario y el tiempo de establecimiento lo cual lo hace más eficiente que el Control Entero.***

CONCLUSIONES

1. El uso de aproximaciones numéricas, basadas series de Tylor y Euler, en el desarrollo del controlador no entero genera un error en estado estacionario debido a que se introduce una ganancia constante, en cambio, si se desarrolla el controlador usando el método de convolución, como predictor del próximo estado, incrementa la eficiencia del controlador.
2. El método de entonación de controladores clásicos basado en el primer criterio de Ziegler y Nichols determinó los parámetros fundamentales de los controladores, la optimización de estos incrementó la eficiencia de los controladores.
3. El criterio de optimización del Gradiente Decreciente basado en función del error ponderado modifica los parámetros fundamentales de los controladores de tal manera que disminuye el error producido en las señales de control.
4. En la evaluación de los controladores se denotó que el algoritmo del control no entero desarrollado en base a predicciones de estado necesita una gran cantidad de espacio de almacenamiento para realizar la convolución con su respuesta impulsional.

RECOMENDACIONES

1. Desarrollar el controlador no entero utilizando otro método de aproximación numérica con el fin de eliminar el error en estado estacionario producido por Tustin.
2. Evaluar el algoritmo de control no entero en otra planta con el fin de evaluar los parámetros de los controladores con otro método de sintonización.
3. Analizar los controladores con los parámetros fundamentales sin optimizar con el fin de determinar la influencia de la función de costo sobre el sistema.
4. Modificar las ponderaciones aplicadas en la función de costo J con el fin de evaluar la respuesta de los controladores, generar criterios de ponderación utilizando varias plantas experimentales.
5. Implementar el algoritmo no entero sobre controladores clásicos, evaluar la pérdida de estados anteriores.

BIBLIOGRAFÍA

- Barbosa, L. et al. (2011). Control fraccionario y adaptativo de un cilindro neumático.
- Daou, R. A. Z. and Moreau, X. (2014). Comparison between integer order and fractional order controllers. In *Mediterranean Electrotechnical Conference (MELECON), 2014 17th IEEE*, pages 292–297. IEEE.
- Garcés, G., Angel, L., and Rincón Gaviria, J. L. (2014). Control pid para el control de velocidad de un motor dc.
- Garrappa, R. (2015). A grunwald–letnikov scheme for fractional operators of havriliak–negami type. *Recent Advances in Applied, Modelling and Simulation*, 34:70–76.
- Hernandez, O., Ortiz, P., and Herrera, J. (2015). Fractional pid controller with lqr proportional action applied to fractional model of cement rotary kiln. *IEEE Latin America Transactions*, 13(1):37–42.
- Hortelano, M. R. (2010). *Control predictivo de orden fraccionario*. PhD thesis, Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Ishteva, M. (2005). *Properties and applications of the Caputo fractional operator*. PhD thesis, Msc. Thesis, Dept. of Math., Universitat Karlsruhe (TH), Sofia, Bulgaria.
- Kumar, A. (2013). *Controller Design for Fractional Order Systems*. PhD thesis, National Institute of Technology, Rourkela.
- Lopez Guillen, M. E. (2010). Identificación de sistemas. aplicación al modelado de un motor de continua. *Departamento de electronica*.
- Loverro, A. (2004). Fractional calculus: history, definitions and applications for the engineer. *Rapport technique, Univeristy of Notre Dame: Department of Aerospace and Mechanical Engineering*.
- Monje, C. A., Chen, Y., Vinagre, B. M., Xue, D., and Feliu-Batlle, V. (2010). *Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications*. Springer Science & Business Media.
- Sauchelli, V. H. and Laboret, S. (2007). Calculo fraccional aplicado a control automatico. *Mecanica Computacional*, 26:3308–3327.
- Vera, J. and Andrés, V. (2010). Diseño e implementación de estrategias de control avanzado sobre plataforma labview para un sistema de calentamiento inductivo de fluidos.

Vinagre, B. M. and Monje, C. A. (2006). Introduccion al control fraccionario. *RIAH*, 3(3):5–23.